Львы

Геометрия, Гаврилюк. Вечер 5 апреля

1. Назовём выпуклый многоугольник константным, если суммы расстояний от точки внутри него до прямых, содержащих стороны постоянна. Докажите, что многоугольник $A_1A_2...A_n$ константен тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{A_1A_2}+...+\frac{\overrightarrow{A_nA_1}}{A_nA_1}=0$.

2. На сторонах BC, CA и AB треугольника взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть M - проекция точки A_1 на B_1C_1. Докажите, что MA_1 - биссектриса угла BMC.

3. Дан угол с вершиной A. На одной из его сторон взяты точки B и B_1, на другой - точки C и C_1 так, что отрезки BC и B_1C_1 пересекаются в точке K. В окружности, описанной около треуголника ABC, проведена хорда AD, параллельная B_1C_1, а в окружности, описанной около треугольника AB_1C_1, проведена хорда AD_1, параллельная BC. Докажите, что точки D, D_1 и K лежат на одной прямой.

4. Диагонали выпуклого четырёхуголника $ABCD$ пересекаются в точке M, $\angle AMD = 120°$, $AM = MD$. На стороне BC взята произвольная точка E, а на стронах AB и CD - соответственно точки K и P так, что $KE \parallel AC$ и $EP \parallel BD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника KEP, лежит на стороне AD.

5. Дан параллелограмм $ABCD$ ($\angle BAD$ - острый). Биссекктриса угла BAD пересекает сторону CD в точке L, а прямую BC - в точке K. Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника LCK. Докажите, что точки D, B, C и O лежат на одной окружности.

6. Через точку M, лежащую внутри окружности, проведены 4 различные хорды A_kB_k, где $k = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что точка P перечечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, точка Q пересечения прямых B_1B_2 и B_3B_4, а также точка M лежат на одной прямой.

7. Прямая, проходящая через центр вписанной в треугольник ABC окружности, пересекает стороны AC и BC в точках E и F. Докажите, что $CE + CF \geq \frac{4BC*AC}{AB+BC+CA}$.

Тельцы

Геометрия, Гаврилюк. Утро 6 апреля

1. Правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром в точке O; M - произвольная точка плоскости. Докажите, что $A_1M^2 + A_2M^2 + ... + A_nM^2 = n(R^2 + OM^2)$.

2. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Пусть O_1 - центр окружности, вписанной в треугольник ABC, O_2 - центр окружности, вписанной в треугольник ABD. Докажите, что прямая O_1O_2 отсекает от треугольника AEB равнобедренный треугольник.

3. Пусть P и Q - середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$; M и N - середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то длины отрезков BC и AD равны.

4. Четыре окружности расположены так, что каждая касается внешним образом двух других. Каждая из этих окружностей касается внутренним образом пятой окружности в точках A, B, C, D. Докажите, что $AB * CD = BC * DA$.

5. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC продолжены до пересечения с описанной около этого треугольника окружностью в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что $\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4$.

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, ABC, BCD и ACD, являются вершинами прямоугольника.

7. На плоскости даны прямая l и треугольник ABC по одну сторону от неё. Пусть A_1, B_1 и C_1 - точки, симметричные A, B и C относительно l. Через точку A_1 проведена прямая, параллельная BC, через точку B_1 - прямая, параллельная AC, через точку C_1 - прямая, параллельная AB. Докажите, что три построенные прямые пересекаются в одной точке.

Тельцы

Геометрия, Гаврилюк. 6 апреля, день

1. Пусть $ABCD$ - выпуклый четырёхугольник; $S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}$- окружности, построенные на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно как на диаметрах. Известно, что окружность S_{AB} касается окружности S_{CD}, а окружность S_{BC} касается окружности S_{DA}. Докажите, что $ABCD$ - ромб.

2. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC, \angle C = \angle A = 90°$. Внутри него выбрана точка X так, что $AX \perp BE, CX \perp BD$. Докажите, что $BX \perp DE$.

3. Дан треугольник ABC, все углы которого выражаются целым числом градусов и отличны от $45°, 90°, 135°$. Точки A_1, B_1, C_1 - основания его высот, точки A_2, B_2, C_2 - основания высот треугольника A_1, B_1, C_1, и т.д. Докажите, что среди треугольников A_n, B_n, C_n бесконечно много подобных между собой.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF || BC$ и $EG || AB$. Докажите, что четырёхугольник $DEFG$ - вписанный.

5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC, \angle ABE + \angle DBC = \angle EBD$ и $\angle AEB + \angle BCD = 180°$. Докажите, что ортоцентр треугольника BDE лежит на диагонали AC.

6. На сторонах AB и BC треуголника ABC выбраны такие точки K и L соответственно, что $\angle KCB = \angle LAB = \alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. Точка F - середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

7. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Высоты треугольника из вершин A и C пересекают окружность в точках E и F соответственно, D - произвольная точка на (меньшей) дуге AC, K - точка пресечения DF и AB, L - точка пересечения DE и BC. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треуголника ABC.

8. В треугольнике ABC проведены чевианы AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке O. Докажите, что O лежит внутри серединного треугольника для $A_1B_1C_1$.