Многочлены Бернулли.

Составитель А. Ефимов

Цель этого листочка – доказать ассимптотики для количества вещественных корней c_n и для максимального вещественного корня y_n многочленов Бернулли $B_n(x)$:

$$c_n = \frac{2n}{\pi e} + \frac{\ln(n)}{\pi e} + O(1), \quad y_n = \frac{n}{2\pi e} + \frac{\ln(n)}{4\pi e} + O(1).$$

Задача -1 (Слабые оценки на $n!$). Докажите, что

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{4e^{n-1}}.$$

Задача 0 (Формула Стирлинга). Докажите ассимптотику для $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

а) Докажите равенство $(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \dots$

б) Докажите, что $1 < \dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e} < \dfrac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$

в) Докажите, что последовательность $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ монотонно убывает, а последовательность $a_n e^{\frac{-1}{12n}}$ монотонно возрастает.

г) Теперь, используя разложение Валлиса $\sin \pi x = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2})$, докажите формулу Стирлинга.

Определение. Многочлены Бернулли $B_n(x)$ определяются следующим тождеством формальных степенных рядов от x и t:

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

Формула Эйлера. Следующей формулой можно пользоваться без доказательства:

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m+1}B_{2m}(0)2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!},$$

где $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ – дзета-функция Римана.

Задача 1. Докажите следующие свойства многочленов Бернулли:

(1) $B_n(x)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом 1.

(2) $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$;

(3) $2^{1-n}B_n(2x) = B_n(x) + B_n\left(x+\frac{1}{2}\right)$;

(4) $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$;

(5) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.

Задача 2. Найдите сумму $1^k + 2^k + \dots + n^k$.

Задача 3. Докажите следующие простые свойства функций $B_n(x)$ на отрезке $[0;1]$ при $n \ge 2$:

1. Если $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, то $B_n(0) = B_n(1) > 0 > B_n(\frac{1}{2})$; функция $B_n(x)$ монотонно убывает на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, монотонно возрастает на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

2. Если $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, то $B_n(0) = B_n(1) < 0 < B_n(\frac{1}{2})$; фунцция $B_n(x)$ монотонно возрастает на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, монотонно убывает на отрезке $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

3. Если $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, то $B_n(0) = B_n(\frac{1}{2}) = B_n(1) = 0$; кроме того, $B_n(x) < 0$ при $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$, $B_n(x) > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{2};1\right)$.

4. Если $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, то $B_n(0) = B_n(\frac{1}{2}) = B_n(1) = 0$; кроме того, $B_n(x) > 0$ при $x \in \big(0; \frac{1}{2}\big)$, $B_n(x) < 0$ при $x \in \big(\frac{1}{2}; 1\big)$.

Задача 4. Обозначим через d_n верхнюю целую часть максимального корня y_n многочлена $B_n(x)$. Докажите, что $d_{n+1} \le d_n + 1$.

Задача 5. Докажите, что

$$\sqrt[4k]{1 - B_{4k}(0)} < d_{4k} < 2 + \sqrt[4k]{-B_{4k}(0)}.$$

Задача 6. Докажите, что

$$\sqrt[4k]{-B_{4k}(0)} = \frac{2k}{\pi e} + \frac{\ln(4k)}{4\pi e} + O(1).$$

Задача 7. Докажите ассимптотику для y_n, указанную в начале листочка.

Задача 8. Докажите, что многочлен $B_{4k+1}(x)$ имеет ровно 2 корня (с учетом кратностей) на полуинтервале $[m; m+1)$ при $1 \le m \le d_{4k+1} - 1$.

Задача 9. Докажите ассимптотику для количества действительнvх корней c_n многочлена $B_n(x)$, указанную в начале листочка.