ТОЖДЕСТВА и БИЕКЦИИ

А. Спивак

Первый учебник математического анализа — Введение в анализ бесконечных — создан Леонардом Эйлером. Разумеется, он сильно отличается от нынешних: Эйлер был великим учёным и не тратил время на искусственные упражнения, нужные только для проверки внимания и памяти учащегося. Введение в анализ бесконечных написано не для тех, кого надо всё время контролировать, а для тех, кого интересует природа вещей. Поэтому оно не стало и не могло стать школьным учебником.

Но зато в этой книге Эйлер указал на обнаруженную им связь комбинаторики и анализа: оказывается, многие комбинаторные задачи можно решать, рассматривая бесконечные ряды — так называемые производящие функции. Эйлер писал: Кроме того, я вывел из того же источника [бесконечных рядов] решения многих вопросов, которые могут возникнуть при разбиении чисел [на слагаемые]; вопросы подобного рода без помощи этих приёмов, видимо, превышают силы анализа.

Но превышают ли? Нельзя ли получить ответы на эти вопросы, не рассматривая бесконечные ряды? Можно! Последние два с половиной века наука не стояла на месте: во всех без исклчения задачах, рассмотренных во Введении в анализ бесконечных, научились (и очень изящно!) обходиться без бесконечных рядов.

С другой стороны, Гаусс, Якоби и другие учёные открыли разнообразные тождества, приводящие к неожиданным и красивым комбинаторным теоремам. И эти теоремы тоже удалось доказать чисто комбинаторными методами!

Нерушимому единству комбинаторики и анализа посвящена эта статья. Почти все результаты доказаны в ней дважды: комбинаторно и при помощи производящих функций.

Но не будем торопиться переходить к трудным задачам. Лучше потренируемся раскрывать скобки.

Бесконечная геометрическая прогрессия

Ну конечно же, вы умеете раскрывать скобки. Например,

$$(1+x)(1+x^2) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Можно даже раскрыть три скобки сразу! Например,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7.$$

Можно раскрыть и четыре, и любое конечное число скобок такого типа:

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n}) = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{2^{n+1}-1}.$$

$$\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \sum_{k=0}^{n}$$

А бесконечно много? Чему равно бесконечное произведение $(1+x)(1+x^2)(1+$ $+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ldots$?

Почему натуральное число можно представить в виде суммы нечётных слагаемых столькими же способами, как и в виде суммы

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i,$$

где $C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ — количество i-элементных подмножеств n-элементного множества, принадлежит и алгебре, и комбинаторике.

Известны и такие тождества:

$$(1-a)(1+a+\cdots+a^n) = 1-a^{n+1},$$

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\cdots(1+a^{2^n}) = 1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{2^{n+1}-1},$$

$$(1+a+a^2+\cdots+a^9)(1+a^{10}+a^{20}+\cdots+a^{90})\cdots(1+a^{10^n}+a^{2\cdot 10^n}+\cdots+a^{9\cdot 10^n}) =$$
$$= 1+a+\cdots+a^{10^{n+1}-1}.$$

Ниже пойдёт речь о подобных равенствах, только менее очевидных. Мы придадим многим из них комбинаторный смысл. Читателю я советую, вооружившись ручкой и бумагой, повторить все выкладки: это поможет не только понять суть дела, но и ощутить степень нетривиальности результатов.

Упражнение 1. Последние два тождества показывают, что каждое натуральное число единственным образом представимо в двоичной и десятичной системах счисления.

0.1. Тождество Эйлера

В сентябре 1740 года или чуть раньше Леонард Эйлер заинтересовался коэффициентами многочлена

$$\varphi_n(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n).$$

Он раскрыл скобки и получил поразительный результат:

$$\begin{array}{lllllllllll}
\varphi_1 & = & 1 & -x, \\
\varphi_2 & = & 1 & -x & -x^2 & +x^3, \\
\varphi_3 & = & 1 & -x & -x^2 & & +x^4 & +x^5 & -x^6, \\
\varphi_4 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +2x^5 & & & -x^8 & -x^9 & +x^{10}, \\
\varphi_5 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & +x^6 & +x^7 & -x^8 & -x^9 & -x^{10}\ldots, \\
\varphi_6 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +2x^7 & & -x^9 & -x^{10}\ldots, \\
\varphi_7 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & +x^8 & & -x^{10}\ldots, \\
\varphi_8 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & +x^9 & \ldots, \\
\varphi_9 & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & +x^{10}\ldots, \\
\varphi_{10} & = & 1 & -x & -x^2 & & & +x^5 & & +x^7 & & & \ldots.
\end{array}$$

Многоточия обозначают части многочленов $\varphi_n(x)$, содержащие x в степенях, бо́льших 10 (выписать эти многочлены полностью не позволяет формат бумаги: многочлен $\varphi_{10}(x)$, например, имеет степень 55).

Начнем с очевидного, но важного наблюдения: коэффициенты многочлена $\varphi_n(x)$ с ростом n стабилизируются, то есть каждый из них начиная с некоторого n не меняется. Это легко понять: переход от $\varphi_{n-1}(x)$ к $\varphi_n(x)$, состоящий в умножении на $1-x^n$, не меняет коэффициенты при $1, x, \dots, x^{n-1}$, так что при $n > k$ коэффициент при x^k в многочлене $\varphi_n(x)$ от n не зависит (например, вычисленная часть многочлена $\varphi_{10}(x)$ не изменится, если вместо φ_{10} взять φ_{11}, φ_{12} и т. д.). Ввиду этого мы можем говорить о бесконечном произведении

$$\varphi(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots{}^{*)},$$

понимая под этим, конечно, не многочлен, а *степенной ряд*, то есть выражение вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ — числа; в нашем случае это стабилизирующиеся коэффициенты.

Наше вычисление показывает, что

$$a_0 = a_5 = a_7 = 1,$$

$$a_1 = a_2 = -1,$$

$$a_3 = a_4 = a_6 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0.$$

Теперь — главное. После раскрытия скобок очень многое уничтожается, можно сказать — почти всё. Читатель, при желании, проверит, что

$$\varphi(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} -$$

$$-x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - x^{70} - x^{77} + x^{92} + x^{100}\cdots.$$

Надо полагать, не боявшийся длинных выкладок Эйлер примерно столько членов ряда $\varphi(x)$ и вычислил. А потом он не мог не заметить, что все ненулевые коэффициенты равны 1 или -1, причём расположены они в строгом порядке: две единицы, две минус единицы, две единицы, две минус единицы и т. д. В таблице

показатели	$1,2$	$5,7$	$12,15$	$22,26$	$35,40$	$51,57$	$70,77$	$92,100$
коэффициенты	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

выписаны показатели степеней x, коэффициенты при которых ненулевые.

Легко угадать, что в n-ом столбце таблицы в верхней строке стоят числа $\frac{3n^2 \pm n}{2}$, в нижней — число $(-1)^n$. Если это так при всех n, то

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \dots + (-1)^n x^{\frac{3n^2-n}{2}} +$$

$$+ (-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}} + \cdots$$

или, пользуясь принятой в математике символикой,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

Это — **тождество Эйлера**, задача **5.3′**.

Решением мы займемся не сразу. Сначала разберем открытые Эйлером задачи **5.1** и **5.1′**.

Задача 5.1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2n-1}} = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$.

Указание.

---

*) При $|x| < 1$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$, так что можно определить значение функции $\varphi(x)$. Но нам это не понадобится, так что лучше, не задумываясь над сходимостью рядов, выполнять формальные преобразования.

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{1-x} & = & (1+x)\ (1+x^2)\ (1+x^4)\ (1+x^8)\ (1+x^{16})\cdots \\
\frac{1}{1-x^3} & = & (1+x^3)(1+x^6)\ (1+x^{12})(1+x^{24})(1+x^{48})\cdots \\
\frac{1}{1-x^5} & = & (1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{20})(1+x^{40})(1+x^{80})\cdots \\
\frac{1}{1-x^7} & = & (1+x^7)(1+x^{14})(1+x^{28})(1+x^{56})(1+x^{112})\cdots \\
& & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Задача 5.1′. Число разбиений n на попарно различные слагаемые равно числу разбиений n на нечётные слагаемые, например:

$$
\begin{array}{rcll}
13 & = & 13 & 13 \\
& & 12+1 & 3+3+3+3+1 \\
& & 11+2 & 11+1+1 \\
& & 10+3 & 5+5+3 \\
& & 10+2+1 & 5+5+1+1+1 \\
& & 9+4 & 9+1+1+1+1 \\
& & 9+3+1 & 9+3+1 \\
& & 8+5 & 1+1+1+1+1+1+1+1+5 \\
& & 8+4+1 & 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 \\
& & 8+3+2 & 1+1+1+1+1+1+1+1+3+1+1 \\
& & 7+6 & 7+3+3 \\
& & 7+5+1 & 7+5+1 \\
& & 7+4+2 & 7+1+1+1+1+1+1 \\
& & 7+3+2+1 & 7+3+1+1+1 \\
& & 6+5+2 & 3+3+5+1+1 \\
& & 6+4+3 & 3+3+1+1+1+1+3 \\
& & 6+4+2+1 & 3+3+1+1+1+1+1+1+1 \\
& & 5+4+3+1 & 5+1+1+1+1+3+1
\end{array}
$$

Алгебраическое решение. Количество разбиений n на попарно различные слагаемые равно коэффициенту при x^n в степенном ряде

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k).^{*)}$$

Поскольку

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{1-x} & = & 1+x^1+x^{1+1}+x^{1+1+1}+x^{1+1+1+1}+x^{1+1+1+1+1}+\cdots, \\
\frac{1}{1-x^3} & = & 1+x^3+x^{3+3}+x^{3+3+3}+x^{3+3+3+3}+x^{3+3+3+3+3}+\cdots, \\
\frac{1}{1-x^5} & = & 1+x^5+x^{5+5}+x^{5+5+5}+x^{5+5+5+5}+x^{5+5+5+5+5}+\cdots, \\
& & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

коэффициент при x^n в произведении

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k-1}}$$

равен количеству разбиений n на нечётные слагаемые. Осталось сослаться на задачу **5.1**.

*) Если это утверждение непонятно, задумайтесь, как раскрываются все скобки сразу.

Комбинаторное решение. Каждому разбиению на попарно различные слагаемые сопоставим разбиение на нечётные слагаемые, представив каждое слагаемое в виде произведения $2^a(2b+1)$, где a, b — целые неотрицательные числа и заменив его суммой 2^a слагаемых, равных $2b+1$ (например, разбиению

$$n = 1 + 4 + 5 + 6 + 20 + 48 + 1992 + 1993$$

сопоставим

$$n = 1 + \underbrace{1+1+1+1}+5+\underbrace{3+3}+\underbrace{5+5+5+5}+$$

$$+\underbrace{3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3}+$$

$$+\underbrace{249+249+249+249+249+249+249+249}+1993).$$

Обратно, каждому разбиению на нечётные слагаемые сопоставим разбиение на попарно различные слагаемые, подсчитав для каждого нечётного слагаемого $(2b+1)$, сколько раз оно входит в сумму, представив это количество N в двоичной системе счисления (т. е. в виде суммы различных степеней числа 2)

$$N = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m}$$

и заменив N слагаемых $(2b+1)$ на сумму

$$2^{a_1}(2b+1) + 2^{a_2}(2b+1) + \dots + 2^{a_m}(2b+1)$$

(например, разбиению

$$n = \underbrace{1+1+1+1+1+1+1}+\underbrace{3+3}+\underbrace{7+7+7+7+7+7}+$$

$$+\underbrace{17+17}+19+\underbrace{1993+1993+1993}$$

сопоставим

$$n = \underbrace{4+2+1}+\underbrace{6}+\underbrace{28+14}+\underbrace{34}+19+\underbrace{3986+1993}.)$$

Итак, построена биекция (то есть взаимно-однозначное соответствие) между представлениями n двух типов.

1. Имея в распоряжении гири 1, 3, 9, 27, 81, ..., можно, пользуясь обеими чашками весов, составить любой целый положительный вес и притом лишь одним способом.

Пояснение.

$$\begin{array}{lll} 1=1 & 5=9-3-1 & 9=9 \\ 2=3-1 & 6=9-3 & 10=9+1 \\ 3=3 & 7=9-3+1 & 11=9+3-1 \\ 4=3+1 & 8=9-1 & 12=9+3 \end{array}$$

....

Решение.

$$(\zeta^{-1}+1+\zeta)(\zeta^{-3}+1+\zeta^3)\cdots(\zeta^{-3^n}+1+\zeta^{3^n}) =$$

$$= \zeta^{-1}\frac{\zeta^3-1}{\zeta-1}\zeta^{-3}\frac{\zeta^9-1}{\zeta^3-1}\cdots\zeta^{-3^n}\frac{\zeta^{3^{n+1}}-1}{\zeta^{3^n}-1} =$$

$$= \zeta^{-N}\frac{\zeta^{3^{n+1}}-1}{\zeta-1} = \zeta^{-N}+\zeta^{-N+1}+\dots+\zeta^{N-1}+\zeta^{N},$$

где

$$N = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Упражнение 3. Определить коэффициент a_n в разложении

$$(1 + q\zeta)(1 + q\zeta^2)(1 + q\zeta^4)(1 + q\zeta^8)(1 + q\zeta^{16}) \cdots = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \cdots$$

Ответ: $a_n = q^{E_n}$, где E_n — число единиц в двоичном представлении числа n.

Упражнение 4. Каков знак n-го члена в разложении произведения

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) \ldots = 1 - a - b + ab - c + ac + bc - abc - d + \ldots ?$$

Указание. Интересующий нас ряд может быть получен из

$$(1 - a\zeta)(1 - b\zeta^2)(1 - c\zeta^4)(1 - d\zeta^8) \cdots,$$

если положить $\zeta = 1$. При определении знака можно положить $a = b = c = d = \ldots = 1$.

Ответ: $.(-1)^{E_n}$.

Упражнение 5. Каждое натуральное n ровно $2^{n-1} - 1$ способом представимо в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся хотя бы порядком слагаемых, считать различными. Например, для $n = 4$ имеем $2^{4-1} - 1 = 7$ способов:

$$1 + 1 + 1 + 1,\ 1 + 1 + 2,\ 2 + 2,\ 1 + 3,\ 1 + 2 + 1,\ 3 + 1,\ 2 + 1 + 1.$$

Решение. Написав сумму n единиц и рассмотрев множество P использованных знаков $+$, сопоставим каждому подмножеству M этого $n - 1$-элементного множества разбиение n на слагаемые, выполнив все действия сложения, кроме вошедших в M. При $M = \varnothing$ получим разбиение, состоящее из единственного слагаемого n. □

Упражнение 6. $\sum\limits_{i=0}^{m} C_r^i \cdot C_s^{m-i} = C_{r+s}^m$.

Алгебраическое указание. $(1 + x)^r(1 + x)^s = (1 + x)^{r+s}$.

Комбинаторное указание. Рассмотрите число способов выбора m человек из r мужчин и s женщин.

Упражнение 7. На окружности отмечены 100 точек A_1, A_2, ..., A_{100}. Каких выпуклых многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: тех, у которых A_1 является вершиной или остальных? На сколько?

Упражнение 8. В некотором обществе любые двое знакомых не имеют общих знакомых, а любые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что все имеют поровну знакомых.

2. Придворный астролог называет момент времени хорошим, если числовая, минутная и секундная стрелки часов находятся по одну сторону от какого-нибудь диаметра циферблата. (Стрелки вращаются на общей оси и не делают скачков.) Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

0.2. Число разбиений

Обозначим через $p(n)$ число способов, которыми n можно представить в виде суммы натуральных слагаемых (при этом слагаемые в суммах могут повторяться, а представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми). Например:

p(1)=1	•		
p(2)=2	2 • •	1+1 • •	
p(3)=3	3 • • •	2+1 • • •	1+1+1 • • •
p(4)=5	4 • • • •	3+1 • • • •	2+2 • • • •
	2+1+1 • • • •	1+1+1+1 • • • •	
p(5)=7	5 • • • • •	4+1 • • • • •	3+2 • • • • •
3+1+1 • • • • •	2+2+1 • • • • •	2+1+1+1 • • • • •	1+1+1+1+1 • • • • •

Здесь с каждым разбиением связана *диаграмма Юнга:* каждое слагаемое изображено строкой из соответствующего количества точек, верхняя строка — самая длинная, ниже — остальные в порядке убывания.

Разбиению $15 = 5 + 5 + 3 + 2$ при этом соответствует диаграмма

$$\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & \bullet & & &
\end{array}$$

Начала строк образуют, как показано, один столбец. Диаграмму можно читать также по столбцам, и тогда разбиение имеет вид $15 = \; = 4 + 4 + 3 + 2 + 2$. Два разбиения, связанные таким образом, назовём сопряжёнными. Очевидно, отношение сопряжённости симметрично.

Задача 5.2. Число разбиений n на k частей равно числу разбиений n на части, наибольшая из которых есть k.

Решение. Сопряжённое разбиение для разбиения на k частей есть разбиение, наибольшая часть которого есть k, и обратно.

Упражнение 9. Укажите комбинаторный смысл разности $p(n+1) - \; -p(n)$.

Ответ. Количество разбиений числа $n+1$ на части, ни одна из которых не равна 1.

Упражнение 10. $p(n+2) + p(n) \geqslant 2p(n+1)$.

Указание. Запишите неравенство в виде $p(n+2) - p(n+1) \geqslant p(n+1) - p(n)$ и заметьте: прибавляя 1 к наибольшей части разбиения $n+1$ на части, большие 1, получаем разбиение числа $n+2$ на части, бо́льшие 1.

Как вычислять $p(n)$? Повозившись, можно найти $p(10) = 42$. А если нужно знать, скажем, $p(50)$? На помощь приходит тождество Эйлера.

Пусть

$$\pi(x) = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots =$$
$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \cdots .^{*)}$$

Факт. *Ряды $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ взаимно обратны, то есть*

$$\varphi(x)\pi(x) = 1.$$

Вы понимаете, что это значит? Степенные ряды можно перемножать:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) =$$
$$= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots ;$$

наше утверждение означает, что если перемножить таким образом ряды $\varphi(x)$ и $\pi(x)$, то полученное произведение сведётся к 1: коэффициенты при x, x^2, $x^3, \ldots$ будут равны нулю.

Доказательство.

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{1-x^k} \cdots =$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \cdots (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots) \cdots .$$

*) Как и $\varphi(x)$, $\pi(x)$ — функция, определенная при $|x| < 1$. Но она интересует нас только как степенной ряд.

При раскрытии скобок в этом произведении получится сумма всевозможных выражений вида
$$x^{a_1}\cdot x^{2a_2}\cdots x^{ka_k},$$
где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые неотрицательные числа. Таким образом, x^n войдёт в сумму столько раз, ско́лькими способами n можно представить в виде $a_1+2a_2+\cdots+ka_k$. Но это представление можно переписать так:

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{a_1}+\underbrace{2+\cdots+2}_{a_2}+\cdots+\underbrace{k+\cdots+k}_{a_k}.$$

Мы видим, что представлений n в виде $a_1+2a_2+\cdots+ka_k$ столько же, сколько представлений n в виде суммы натуральных слагаемых, то есть $p(n)$. Таким образом, коэффициент при x^n равен $p(n)$, то есть $\frac{1}{\varphi(x)}=\pi(x)$.

Положив для удобства $p(0)=1$, напишем

$$(1-x-x^2+x^5+x^7-\cdots)(p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\cdots)=1$$

(коэффициенты в первом сомножителе пишутся согласно тождеству Эйлера!).

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при $x, x^2, \ldots, x^n$ в левой части:

$$\begin{gathered}p(1)-p(0)=0;\\ p(2)-p(1)-p(0)=0;\\ p(3)-p(2)-p(1)=0;\\ \ldots\ldots\ldots\\ p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-\cdots=0\end{gathered}$$

(в левой части последней формулы нужно писать слагаемые до тех пор, пока аргумент у p остается неотрицательным).

Итак,
$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\cdots.$$

Эта формула позволяет быстро составить довольно длинную таблицу чисел $p(n)$. Вот практический совет, как это сделать. Возьмите лист клетчатой бумаги — лучше двойной тетрадный лист. Отрежьте вдоль его длинной стороны полоску шириной 3-4 клетки. Положите эту полоску перед собой вертикально и у левого среза в нижней клетке поставьте какой-нибудь знак, скажем, звёздочку. Затем, двигаясь вверх, поставьте в первой клетке $+$, во второй $+$, в пятой $-$, в седьмой $-$, в двенадцатой $+$, в пятнадцатой $+$, и т. д., насколько хватит длины полоски. Оставшуюся часть листа также положите перед собой вертикально и, отступив 10–15 клеток от ее левого среза, проведите вертикальную черту — сверху донизу. В клетки, прилегающие к черте слева, двигаясь сверху вниз, выпишите уже известные нам числа $p(n)$, начиная с $p(0)$: $1, 1, 2, 3, 5, 7$. Чтобы найти следующее значение, приложите отрезанную полоску справа к вертикальной черте, чтобы звёздочка оказалась против первой пустой клетки. Теперь из суммы чисел, стоящих против плюсов, вычтите сумму чисел, стоящих против минусов. Результат впишите в клетку против звёздочки: это — следующее значение функции $p(n)$. Опустите полоску на одну клетку вниз и повторите то же самое. И так далее. Через несколько минут вы получите колонку чисел $p(n)$ высотой в лист.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
1	1	26	2436	51	239943	76	9289091
2	2	27	3010	52	281589	77	10619863
3	3	28	3718	53	329931	78	12132164
4	5	29	4565	54	386155	79	13848650
5	7	30	5604	55	451276	80	15796476
6	11	31	6842	56	526823	81	18004327
7	15	32	8349	57	614154	82	20506255
8	22	33	10143	58	715220	83	23338469
9	30	34	12310	59	831820	84	26543660
10	42	35	14883	60	966467	85	30167357
11	56	36	17977	61	1121505	86	34262962
12	77	37	21637	62	1300156	87	38887673
13	101	38	26015	63	1505499	88	44108109
14	135	39	31185	64	1741630	89	49995925
15	176	40	37338	65	2012558	90	56634173
16	231	41	44583	66	2323520	91	64112359
17	297	42	53174	67	2679689	92	72533807
18	385	43	63261	68	3087735	93	82010177
19	490	44	75175	69	3554345	94	92669720
20	627	45	89134	70	4087968	95	104651419
21	792	46	105558	71	4697205	96	118114304
22	1002	47	124754	72	5392783	97	133230930
23	1255	48	147273	73	6185689	98	150198136
24	1575	49	173525	74	7089500	99	169229875
25	1958	50	204226	75	8118264	100	190569292

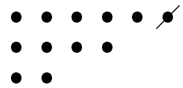
Значения $p(n)$ **для** $n = 1, \ldots, 100$.

0.3. Доказательство тождества Эйлера

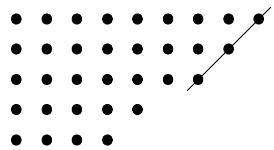
Задача 5.3. Число n сто́лькими же способами представимо в виде суммы чётного числа различных слагаемых, ско́лькими и в виде суммы нечётного числа различных слагаемых, если только n не имеет вид $\frac{3k^2 \pm k}{2}$, где k — натуральное число. Если $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то разложений в сумму чётного числа различных слагаемых на $(-1)^k$ больше.

Решение. Из крайней справа точки верхней строки проведём через точки нашей диаграммы насколько возможно длинную прямую с угловым коэффициентом 1; может случиться, разумеется, что она будет содержать только одну точку. Дальнейшее зависит от того, больше или меньше точек содержит нижняя строка и ясно из таблицы разбиений числа 15.

Для описания этого соответствия на языке разбиений $n = n_1 + \cdots + n_k$, $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$, обозначим через s наибольшее такое число, что $n_s - n_1 = s - 1$, то есть s чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ идут *подряд*. Например, для разбиения $12 = 6 + 4 + 2$ $s = 1$,



для разбиения $33 = 9 + 8 + 7 + 5 + 4$ $s = 3$.



Мы скажем, что у разбиения $(n_1, \ldots, n_k)$

короткая наклонная, если $s < n_k$, исключая случай $n_k = s + 1$, $s = k$;

длинная наклонная, если $n_k \leqslant s$, исключая случай $n_1 = s = k$.

Особыми назовём исключённые разбиения, то есть те, где $s = k$ и $n_1 = s$ или $n_1 = s + 1$.

Поставим теперь в соответствие разбиению $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ с короткой наклонной разбиение

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_s - 1) + n_{s+1} + \cdots + n_k + s.$$

Разбиению $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ с длинной наклонной сопоставим

$$(n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \cdots + (n_{n_k} + 1) + n_{n_k + 1} + \cdots + n_{k-1}.$$

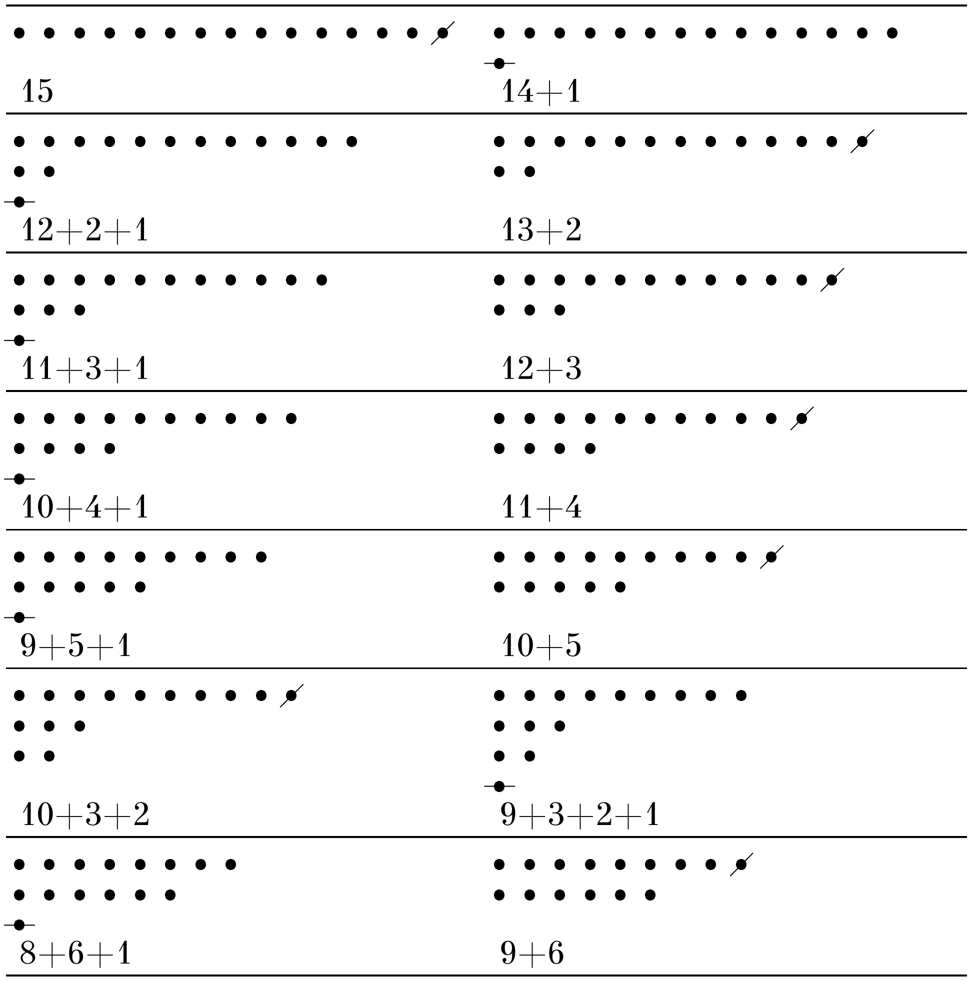
Заметьте: сопоставления согласованы, а количества слагаемых в соответствующих друг другу разбиениях различаются на 1.

Осталось заметить, что особые разбиения из s слагаемых имеют вид

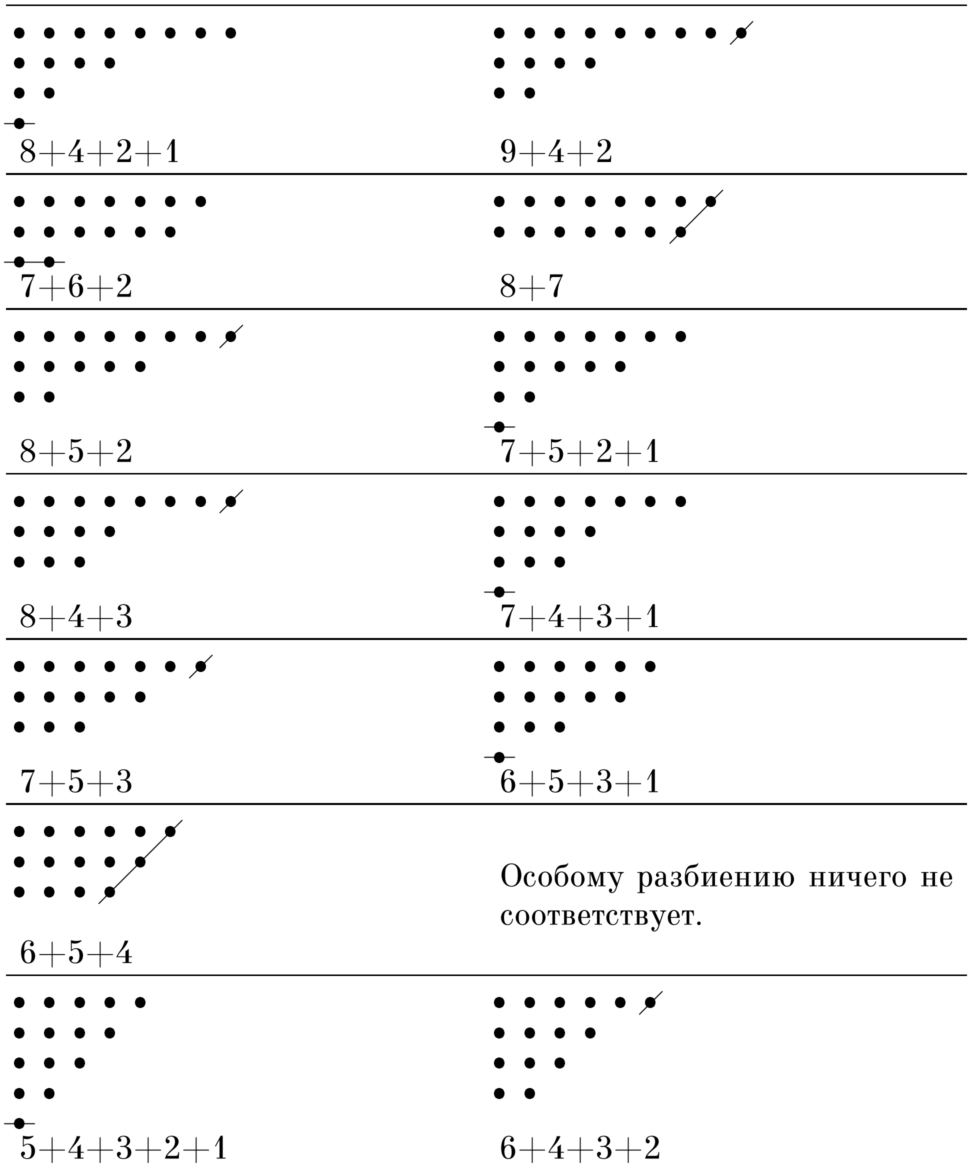
$$\frac{3s^2 - s}{2} = (2s - 1) + \cdots + (s + 1) + s,$$

$$\frac{3s^2 + s}{2} = (2s) + \cdots + (s + 2) + (s + 1)$$

□



Разбиения числа 15.



Разбиения числа 15. Окончание.

0.4. Числа Каталана

Произведение abc можно понимать двояко: $(ab)c$ и $a(bc)$. Конечно, по закону ассоциативности, $(ab)c = a(bc)$. Но если не обращать на это внимания, произведение $abcd$ можно понимать 5 способами: $[(ab)c]d$, $[a(bc)]d$, $a[(bc)d]$, $a[b(cd)]$, $(ab)(cd)$.

Задача. Найти число u_n способов расставить скобки в произведении n множителей.

Алгебраическое решение. Рассмотрим знак умножения, которое будет выполнено в последнюю очередь. Произведение $x_1 x_2 \cdots x_n$ получается в конечном счете как произведение некоторого произведения первых r символов на некоторое произведение последних $n-r$ символов:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_1 \cdots x_r)(x_{r+1} \cdots x_n).$$

Первые r символов могут быть скомбинированы u_r способами (считаем, что $u_1 = 1$), последние $n-r$ символов — u_{n-r} способами. Таким образом,

$$u_n = u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \dots + u_{n-1} u_1.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$f(x) = u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots ,$$

оставив в стороне вопрос о сходимости. Поскольку

$$f(x) \cdot f(x) = u_1^2 x^2 + (u_1 u_2 + u_2 u_1) x^3 + (u_1 u_3 + u_2 u_2 + u_3 u_1) x^4 + \ldots +$$
$$+ (u_1 u_{n-1} + u_2 u_{n-2} + \ldots + u_{n-1} u_1) x^n + \ldots ,$$

рекуррентное соотношение эквивалентно соотношению

$$f^2(x) = -x + f(x).^{*)}$$

Решая квадратное уравнение относительно $f(x)$, получаем

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.^{\dagger)}$$

Здесь взят знак минус, так как ряд $f(x)$ не имеет свободного члена. Разложим правую часть в ряд по степеням x по биному Ньютона:

$$u_n = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!} (-4)^n.$$

Это выражение упрощается:

$$u_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n-1}.$$

Упражнение 11. Найдите явную формулу для последовательности Фибоначчи

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1, \ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}.$$

Решение. Если

$$\varphi(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n x^{n-1},$$

то $\varphi(x) \cdot (1 - x - x^2) = 1$. Осталось разложить дробь $\frac{1}{1-x-x^2}$ на простейшие:

$$\frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 + x\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1 - x\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) =$$

---

*) Заметим, что $u_1 = 1$ и рекуррентное соотношение выполнено лишь при $n \geqslant 2$. Это учтено членом $-x$ в правой части.

†) Теперь ясно, что ряд для $f(x)$ сходится при $|x| < \frac{1}{4}$. Впрочем, нам это не важно.

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(x \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^k \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{k+1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Ответ: .

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Упражнение 12. Число способов разрезать выпуклый n-угольник на $n-2$ треугольника равно u_{n-1}.

Упражнение 13. u_n равно числу последовательностей из $n-1$ единицы и $n-1$ минус единицы, суммы всех начальных отрезков которых неотрицательны [*)].

Комбинаторное решение задачи о числах Каталана. Каждой последовательности $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, сопоставим путь, выходящий из начала координат, i-ый отрезок которого $(i = 1, \ldots, n)$ является отрезком прямой с угловым коэффициентом ε_i, соединяющим точку $(i-1,\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1})$ с точкой $(i,\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i)$.

Через $N_{n,s}$ обозначим количество путей, оканчивающихся в точке (n, s). Очевидно, если среди $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ имеется p единиц и q минус единиц, то $s = p - q$ и, поскольку p мест для положительных ε_i выбираются из $n = p + q$ имеющихся мест, $N_{p+q,p-q} = C_{p+q}^p$.

Пусть A и B — точки с целыми координатами, лежащие выше оси абсцисс, A' — точка, симметричная A относительно оси абсцисс.

Принцип отражения. Число путей из A в B, которые касаются оси абсцисс или пересекают ее, равно числу всех путей из A' в B.

Доказательство. Если T — самая левая точка пути, попавшая на ось абсцисс,

---

[*)] Заменив $+1$ на (, а -1 на), заметьте: u_n есть число способов так расположить $n-1$ открывающих и $n-1$ закрывающих скобок в ряд, что при чтении слева направо ни в какой момент число закрывшихся скобок не превзойдет число открывшихся.

отразим участок AT относительно оси.

Теорема о баллотировке. Если на выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, то вероятность того, что при последовательном подсчете голосов P все время опережал Q, равна $\frac{p-q}{p+q}$.

Иными словами, если n и s — целые положительные числа, то существует ровно $\frac{s}{n}N_{n,s}$ путей из начала координат в точку (n, s), все точки которых, кроме начала координат, расположены выше оси абсцисс.

Доказательство. По принципу отражения, путей из $(1, 1)$ в (n, s), не задевающих ось абсцисс, имеется ровно

$$N_{n-1,s-1} - N_{n-1,s+1} = C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p}.$$

Простая выкладка показывает, что правая часть равна $N_{n,s}\frac{p-q}{p+q}$.

Замечание. Число Каталана u_n получается, если в теореме о баллотировке положить $p = n$, $q = n - 1$.

Другое комбинаторное решение задачи. Каждому произведению с правильно расставленными скобками сопоставим слово из букв a и p по следующему правилу: если выражение состоит лишь из одной буквы, пишем a; если выражениям U и V уже сопоставлены слова u и v, то произведению $U \cdot V$ сопоставляем uvp. Например:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & ab & \longmapsto & aap, & & \\
 & & (ab)c & \longmapsto & aaapp, & & \\
 & & a(bc) & \longmapsto & aaapp, & & \\
((ab)c)d & \longmapsto & ((aap)c)d & \longmapsto & (aapap)d & \longmapsto & aapapap, \\
 & & a(b(cd)) & \longmapsto & aaaappp, & & \\
 & & (a(bc))(de) & \longmapsto & aaappaapp. & &
\end{array}$$

Разумеется, каждой расстановке скобок соответствует слово из n букв a и $n-1$ букв p. Обратное неверно: например, слова *ppaaa* или *apaap* не могут быть получены с помощью описанной процедуры.

Ситуацию проясняет понятие циклически сравнимых слов. Начнем с примера. Записав буквы *С Л О В А* по кругу, прочитаем по часовой стрелке одно из слов:

$$\begin{array}{ccccc} С & Л & О & В & А \\ Л & О & В & А & С \\ О & В & А & С & Л \\ В & А & С & Л & О \\ А & С & Л & О & В \end{array}$$

Определение. Слова $a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n$ и $a_{k+1} \dots a_n a_1 \dots a_k$ называются *циклически сравнимыми*.

Факт. Если A — слово из n букв a и $n-1$ буквы p, то одно и только одно из циклически сравнимых с A слов получается из некоторой расстановки скобок вышеописанной конструкцией.

Доказательство. Индукция по n. Среди циклически сравнимых с A слов имеет смысл рассматривать лишь те, которые не начинаются с буквы p, но кончаются ею. Такие, конечно, существуют. В таком слове A — это тоже легко понять — найдётся подслово вида aap. Заменим его буквой a. Мы получили слово, в котором $n-1$ буква a и $n-2$ буквы p.

Теперь формула для числа Каталана очевидна: среди $2n-1$ мест мы можем в точности C_{2n-1}^{n-1} способами выбрать $n-1$ место для букв p. Так как в каждом классе циклически сравнимых слов длины $2n-1$ окажется ровно $2n-1$ *различных* (почему?) слов, $u_n = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n-1}$.

0.5. Тождество Гаусса-Якоби

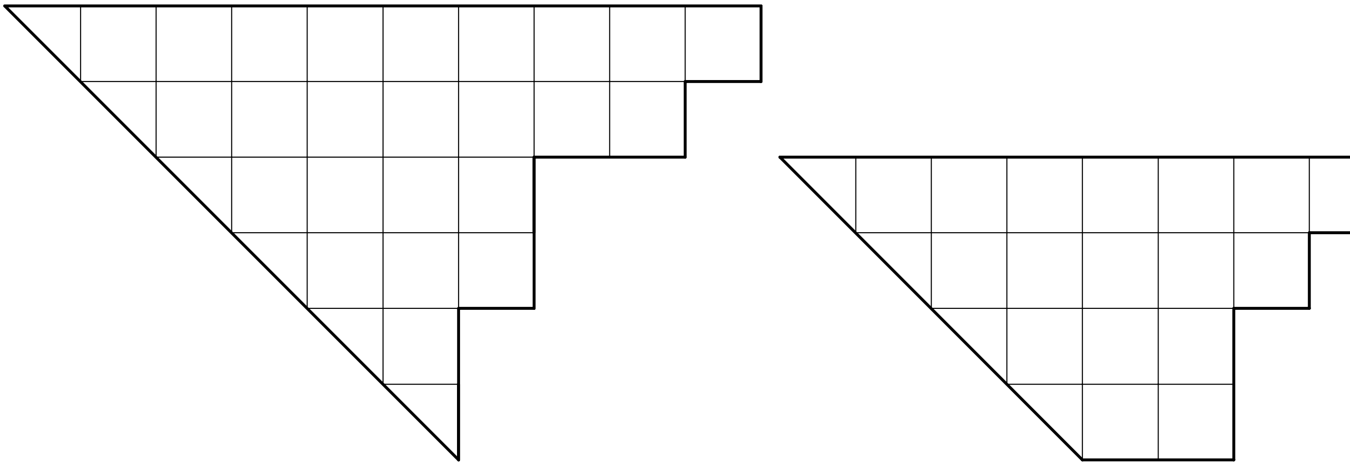
Задача 5.4.

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{2k})(1+q^{2k-1}z)(1+q^{2k-1}z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n q^{n^2}. \qquad (1)$$

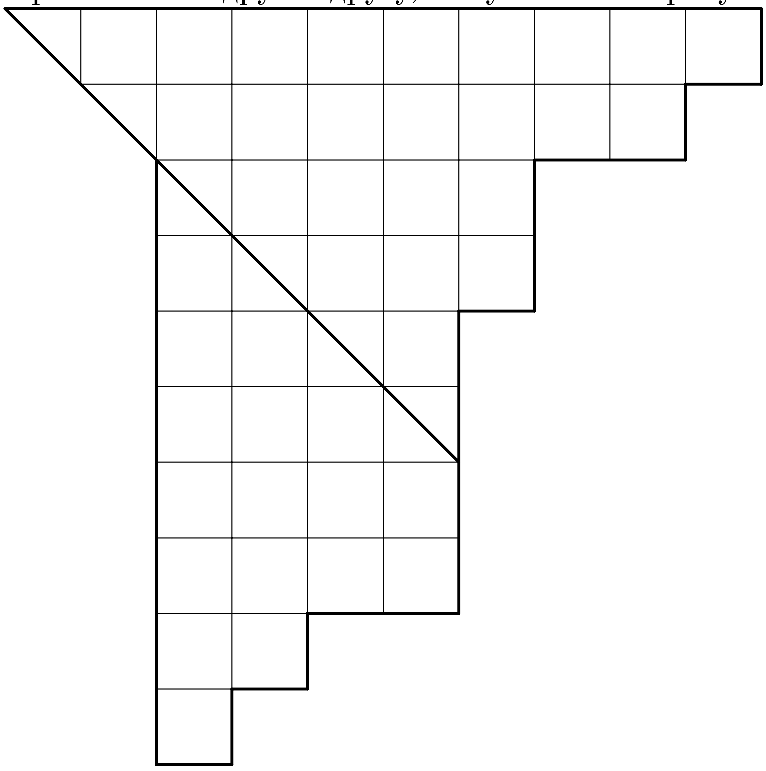
Комбинаторное решение. Запишем равенство (1) в виде:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+q^{2k-1}z)(1+q^{2k-1}z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n q^{n^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1+q^{2k}+q^{4k}+q^{6k}+\cdots).$$

Будем рисовать диаграммы, считая, что полклетки изображает 1. Тогда разбиения $a = 19+17+9+7+5+1$ и $b = 15+11+7+5$ изобразятся следующими рисунками:

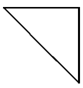
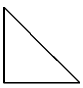
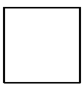


Приложив их друг к другу, получим такой рисунок:



Отрезав треугольник (сторона которого n как раз равна разности количеств слагаемых в разбиениях), получим диаграмму разбиения числа $a+b-n^2$ на чётные слагаемые.

Замечание. Если считать, что

 $= n-1$,  $= 1$,  $= n$,

тот же рисунок дает тождество

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{kn})(1+q^{kn-1}z)(1+q^{kn-(n-1)}z^{-1}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} z^i q^{\frac{ni(i+1)}{2}-i}.$$

Впрочем, оно получается из (1) заменой переменных.

Алгебраическое решение.

Упражнение 14. Функция

$$F(z) = (1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\cdots$$

раскладывается в степенной ряд

$$F(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \cdots .$$

Определить коэффициенты A_n из функционального уравнения

$$F(z) = (1+qz)F(qz).$$

Решение. Из функционального уравнения сравнением коэффициентов при z^n в обеих частях получаем

$$A_n(1-q^n) = A_{n-1}q^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда, поскольку $A_0 = 1$, находим

$$A_n = \frac{q^{1+2+\cdots+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

Итак,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^nz) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}z^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

Заменив z на $\frac{z}{q}$ и q на q^2, получим тождество

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1}z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}z^n}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}.$$

Комбинаторный смысл коэффициента при q^mz^n после раскрытия скобок левой части — число разбиений m на n различных нечётных слагаемых. Чтобы понять смысл правой части, заметим: коэффициент при q^l после раскрытия скобок в выражении

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = (1+q+q^{1+1}+\cdots)(1+q^2+q^{2+2}+\cdots)\cdots$$

$$\cdots(1+q^n+q^{n+n}+q^{n+n+n}+\cdots)$$

есть число разбиений l на слагаемые, не превосходящие n.

Разбиение числа l вместе с сопряжённым разбиением и квадратом $n\cdot n$ образуют самосопряжённое (то есть симметричное относительно диагонали) разбиение числа n^2+2l. Поэтому коэффициент при q^mz^n правой части — число самосопряжённых разбиений m, длина диагонали которых равна n.

Соответствие между левой и правой частями получаем, распрямляя каждую часть, аналогичную заштрихованной на рисунке.

Упражнение 15. Определить коэффициенты в разложении

$$\frac{1}{F(z)} = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \cdots .$$

Решение. Из функционального уравнения функции F получаем

$$\beta_n (q^n - 1) = \beta_{n-1} q.$$

Поскольку $\beta_0 = 1$, имеем

$$\beta_n = \frac{q^n}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)}.$$

Упражнение 16. Определить коэфффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ в тождестве

$$(1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\cdots(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}) =$$
$$= c_0 + c_1(z+z^{-1}) + c_2(z^2+z^{-2}) + \cdots + c_n(z^n+z^{-n}).$$

Решение. Обозначим рассматриваемое выражение через $f(z)$. Имеем:

$$f(q^2z) = f(z)\,\frac{1+q^{2n+1}z}{qz+q^{2n}}.$$

Отсюда

$$c_\nu q^{2\nu+1}(1-q^{2n-2\nu}) = c_{\nu+1}(1-q^{2n+2\nu+2}),$$
$$c_n = q^{n^2},$$

следовательно,

$$c_\nu = \frac{(1-q^{2n+2\nu+2})(1-q^{2n+2\nu+4})\cdots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n-2\nu})}q^{\nu^2} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Теперь для решения задачи 4 достаточно перейти к пределу при $n \to \infty$ в тождестве упражнения 16.

Задача 5.4$'$.

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-q^kz)(1-q^kz^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}(-1)^n(z^n+z^{n-1}+\cdots+z^{-n}).$$

Решение. Заменив в задаче 4 z на $-z\sqrt{q}$, q на $\sqrt{q}$, получим

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-q^kz)(1-q^{k-1}z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n z^n q^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Разделим обе части на $1-z^{-1}$:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-q^kz)(1-q^kz^{-1}) =$$

$$= (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n z^n q^{\frac{n^2+n}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}}(z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{-n-1} q^{\frac{(-n-1)^2-n-1}{2}}(z^{-n-1} + z^{-n-2} + z^{-n-3} + \cdots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n^2+n}{2}}(-1)^n(z^n + z^{n-1} + \cdots + z^{-n}).$$

Задача 5.5. (Гаусс).

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^3 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)q^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

У к а з а н и е. Подставьте $z = 1$ в тождество задачи $4'$.

Задача 5.6.

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2\cdots = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - \cdots.$$

Задача 5.7.

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} = 1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \cdots.$$

Упражнение 17. Если $\varphi(t) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-t^n)$, то

а) $$\frac{\varphi(t^2)^2}{\varphi(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^{2k^2+k} \qquad (\textit{Гаусс});$$

б) $$\frac{\varphi(t^2)^5}{\varphi(t)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k(3k+1)t^{3k^2+2k} \qquad (\textit{Гордон});$$

в) $$\frac{\varphi(t)^5}{\varphi(t^2)^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(6k+1)t^{\frac{3k^2+k}{2}} \qquad (\textit{Гордон});$$

г) $$\frac{\varphi(t^2)\varphi(t^3)^2}{\varphi(t)\varphi(t^6)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^{\frac{3k^2+k}{2}};$$

д) $$\frac{\varphi(t)\varphi(t^6)}{\varphi(t^2)\varphi(t^3)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k t^{3k^2+2k};$$

е) $$\frac{\varphi(t)^2\varphi(t^6)}{\varphi(t^2)\varphi(t^3)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{3}\right) t^{\frac{k^2+k}{2}};$$

ж) $$\frac{\varphi(t^2)^2\varphi(-t^3)}{\varphi(-t)\varphi(t^6)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{3}\right) t^{k^2};$$

Здесь $\left(\frac{k+1}{3}\right)$ — символ Лежандра, так что $\left(\frac{k+1}{3}\right) = 0$, 1 или -1 в зависимости от того, даёт k при делении на 3 в остатке 2, 0 или 1.

Упражнение 18.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n) = e^{-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n}t^n},$$

где $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n.

Решение. Поскольку $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$, имеем

$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-t^n) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^{nm}}{m} =$$

$$= -\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{mn=N}\frac{nt^N}{N} = -\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\sigma(N)t^N}{N}.$$

Упражнение 19. Рассмотрим произведение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^8)(1-x^{13})\cdots$$

(показатели степеней — числа Фибоначчи). Взяв любое (подряд!) количество скобок и перемножив их, мы получим многочлен, все коэффициенты которого равны 0, 1 или -1.

Подсказка. Любое натуральное число однозначно представимо в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи, таких, что для любого входящего в это представление числа Фибоначчи в представлении имеется и хотя бы одно из двух предшествующих ему чисел Фибоначчи.

3. По окружности выписано 100 целых чисел, сумма которых равна 1. Цепочкой назовём несколько чисел, стоящих подряд. Найти количество цепочек, сумма чисел в которых положительна.
4. (Эйлер) Если f_n — количество способов расставить n ладей на доске $n\times n$, чтобы они не били друг друга и ни одна не попала на диагональ, ведущую из левого верхнего угла в правый нижний, то

КВАНТ: 78, 7

81, 8

84, 5 Воронин, Кулагин

88, 11 и 12

89, 10, Виленкин

99, 5 и 6

Совершенные числа 71,8 и 91,5

Можно ли использовать алгебраические преобразования и методы математического анализа в комбинаторике?

Питерская, 1999-2000 учебный го5д Сложностью последовательности a_1, a_2, …, составленной из нулей и единиц, назовем такое наименьшее натуральное число k такое, что для некоторых натуральных чисел ε_1, ε_2, …, ε_k каждый член последовательности a_n, $n>k$, имеет ту же четность, что и $\varepsilon_1 a_{n-1}+\varepsilon_2 a_{n-2}+\ldots+\varepsilon_k a_{n-k}$. Пусть сложность последовательности a_1, a_2, … равна 1000. Какова может быть сложность последовательности $1-a_1$, $1-a_2$, … ? (*9, А. Кириченко*)

Ответ: 999, 1000 или 1001. *Указание.* Рассмотрим производящую функцию $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k$ нашей последовательности над $\mathbb{Z}_2$. Она будет рациональной дробью, а сложность — это степень знаменателя. Инвертирование — это вычитание $f(x)$ из $1/(1-x)$. Эта операция меняет степень знаменателя не более чем на 1.