Числа Каталана

А. Спивак

Эта статья состоит из двух частей. В первой части дано три десятка разных определений одной и той же последовательности натуральных чисел, доказана равносильность некоторых из этих определений и выведена рекуррентная формула. Во второй части тремя совершенно непохожими способами выведена явная формула для n-го члена этой последовательности.

Эйлер–Каталан–Фордер–Кэли–Лукасевич–Бернхарт–Белл–Гроуми

Разрезания на треугольники

Леонард Эйлер был первым, кто столкнулся с интересующей нас последовательностью. Он спросил себя, сколькими способами можно выпуклый n-угольник разрезать на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого n-угольника. Ответ для $n = 3$ тривиален: никаких диагоналей проводить не надо (рис. 1). Для $n = 4$ можно провести любую из двух диагоналей, так что способов два (рис. 2). Для $n = 5$ — из любой вершины две диагонали, 5 способов (рис. 3). При $n = 6$ получаем первый нетривиальный ответ: 14 способов (рис. 4).

Интересно, как быть с семиугольником? Неужели нужно рисовать все способы? Нет, можно выделить одну из сторон и расклассифицировать разрезания в зависимости от того, какой треугольник к этой стороне примыкает. Имеем 5 разных случаев (рис. 5). В первом и последнем из них количество разбиений равно 14, ибо после отрезания треугольника остаётся шестиугольник. Во втором и четвёртом случаях при вырезании треугольника семиугольник распадается на треугольник и пятиугольник. В третьем случае семиугольник распадается на два четырёхугольника. Поскольку каждый из них можно разбить двумя способами, получаем $2 \cdot 2 = 4$ варианта. Итак, семиугольник можно разбить всего

$$14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 = 42$$

способами. Рассматривая восьмиугольник, аналогично получаем

$$42 + 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 + 42 = 132$$

способа. Для девятиугольника имеем

$$132 + 42 + 2 \cdot 14 + 5 \cdot 5 + 14 \cdot 2 + 42 + 132 = 429$$

способов, а для десятиугольника —

$$429 + 132 + 2 \cdot 42 + 5 \cdot 14 + 14 \cdot 5 + 42 \cdot 2 + 132 + 429 = 1430$$

способов. Такие вычисления можно проводить и дальше. Вот что получится: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640, 343059613650, 1289904147324, ...

Упражнения

1. *На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно так разбить их на пары, чтобы соответствующие хорды не пересекались? (На рисунках 6 а,б,в показаны все способы для, соответственно, 2, 4 и 6 отмеченных точек.)*

1430. *Указание.* Для получения рекуррентной формулы рассмотрите некоторую отмеченную точку и хорды, которые соединяют её с отмеченными точками и делят окружность на части, в каждой из которых чётное число отмеченных точек.

2. *На рисунке 7 показаны все способы разбить на пары 6 точек, расположенных на горизонтальной прямой, при помощи непересекающихся линий, расположенных в верхней полуплоскости.*[*] *Сколькими способами так можно разбить на пары 10 точек?*

42.

3. *На рисунке 8 изображены все 5 способов провести в правильном 6-угольнике, две параллельные стороны которого расположены горизонтально, несколько (возможно, даже 0) горизонтальных сторон или диагоналей таким образом, что остальные вершины можно разбить на пары при помощи непересекающихся сторон или диагоналей. Сколькими способами можно выполнить аналогичное построение для правильного 14-угольника?*

1430.

4. *На рисунке 9 изображены все 5 способов соединить некоторые из расположенных на одной горизонтальной прямой точек таким образом, чтобы дуги лежали в верхней полуплоскости и не пересекали одна другую, их количество в сумме с количеством изолированных точек равнялось двум, причём ни одна изолированная точка не лежала под дугой. Сколько способов нарисовать такие картинки, чтобы сумма количества дуг и количества изолированных точек равнялась шести?*

429.

5. *На рисунке 10 изображены все 5 способов соединить четыре точки, расположенные на горизонтальной прямой, дугами, лежащими в верхней полуплоскости и не пересекающими одна другую во внутренних точках, таким образом, чтобы из любой точки можно было дойти по дугам в любую другую, причём единственным способом (другими словами, дуги должны образовывать дерево), да к тому же в любой точке сходящиеся в ней дуги должны идти либо все направо, либо все — налево. Сколько способов для 7 точек?*

132.

6. *На рисунке 11 изображены все 5 способов соединить лежащими в верхней полуплоскости дугами четыре расположенные на горизонтальной прямой точки, таким образом, чтобы дуги образовывали дерево, в любой точке сходящиеся в ней дуги либо все шли либо все направо, либо все налево. причём никакая дуга не расположена всеми своими точками (включая концевые) строго под другой дугой. Сколько способов для 10 точек?*

4862.

Вычисления произведений

Рассмотрим другую — алгебраическую — задачу. Произведение abc можно понимать двояко: $(ab)c$ и $a(bc)$. (Конечно, по закону ассоциативности, результат не зависит от порядка умножений. Но промежуточные результаты — зависят!) Произведение $abcd$ можно понимать пятью способами: $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$, $a(b(cd))$ и $(ab)(cd)$. Произведение $abcde$ — четырнадцатью способами. Чтобы убедиться в

[*] В этом и следующих упражнениях форма линий не имеет значения. Важно лишь то, пересекаются линии или нет и какие точки они соединяют.

этом, не обязательно их все выписывать. Достаточно заметить, что есть 5 способов вида $a(bcde)$, 2 способа вида $(ab)(cde)$, 2 способа вида $(abc)(de)$ и 5 способов вида $(abcd)e$.

По определению, число Каталана*) C_n — это количество способов расставить скобки в произведении n множителей. Выведем для неё рекуррентную (то есть выражающую очередной член последовательности через предыдущие) формулу. Для этого рассмотрим знак умножения, которое будет выполнено в последнюю очередь. Произведение $x_1 x_2 \cdots x_n$ получается в конечном счете как произведение некоторого произведения первых нескольких символов на некоторое произведение остальных:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_1 \cdots x_r) \cdot (x_{r+1} \cdots x_n).$$

Первые r символов могут быть скомбинированы C_r способами, последние $n-r$ символов — C_{n-r} способами. Таким образом,

$$C_n = C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_1.$$

Другими словами, чтобы посчитать, например, C_{10}, достаточно выписать одно за одним первые девять чисел Каталана, а под ними — те же числа в обратном порядке; умножив каждое верхнее число на соответствующее нижнее и сложив, получаем $C_{10} = 4862$.

1	1	2	5	14	42	132	429	1430
1430	429	132	42	14	5	2	1	1

Поскольку рекуррентная формула и начальные члены последовательности, рассмотренной в предыдущем разделе статьи, совпадают с рекуррентной формулой и начальными членами последовательности Каталана, мы нашли связь между этими двумя задачами. А именно, количество способов разрезать выпуклый n-угольник на $n-2$ треугольника равно C_{n-1}.

Нельзя ли найти ещё более явную связь между рассмотренными двумя задачами — построить взаимно-однозначное соответствие (коротко говоря, биекцию) между разбиениями на треугольники и способами подсчёта произведений? Можно! Для этого, как заметил Фордер в 1961 году, достаточно выделить одну сторону $(n+1)$-угольника и написать сомножители около других его сторон, по одной букве у каждой стороны, а затем «стягивать» треугольники, на двух сторонах которых уже что-то написано, записывая произведение на третью сторону (на рисунках 12 и 13 это показано для $n=2$ и 3 соответственно, а на рисунке 14 изображён один из 429 случаев для $n=8$).

Упражнение 7. *Число C_n чётно тогда и только тогда, когда n является степенью двойки, точнее, когда $n = 2^k$, где k — целое неотрицательное число. Докажите это.*

Указание. Поскольку рекуррентная формула одинаково читается как слева направо, так и справа налево, то чётны все числа C_{2n+1}, где $n > 0$. По той же причине число C_{2n} чётно тогда и только тогда, когда чётно число C_n.

*) Эжен Шарль Каталан (1814-1894) — бельгийский математик.

Расстановки скобок

Рассмотрим какое-нибудь арифметическое выражение и сотрём всё, кроме скобок. Получим некоторую систему открывающих и закрывающих скобок. Какими свойствами она обладает? Во-первых, открывающих скобок ровно столько же, сколько и закрывающих. Во-вторых, ни в каком начальном отрезке количество закрывающих скобок не может оказаться больше количества открывающих скобок. (Например, расстановки)(и ((()))(— неправильные.) Нетрудно доказать, что эти два условия не только необходимы, но и достаточны.

Рассмотрим несколько примеров. Одна пара скобок может выглядеть единственным способом: (). Две пары — двумя способами: ()() или (()). Три пары — пятью способами: ()()(), ()(()), (())(), (()()) или ((())). Четыре пары, как нетрудно проверить,— четырнадцатью способами. Чтобы понять, сколькими способами могут выглядеть правильно расставленные пять пар скобок, рассмотрим закрывающую скобку, парную к первой открывающей скобке. Остальные четыре пары тогда разделятся на две группы: расположенные внутри рассмотренной пары и расположенные справа от неё. (Разумеется, любая из этих групп может состоять из 0 скобок.) Способов, когда все четыре пары внутри или все четыре справа, имеется по 14 штук. Когда три пары внутри, а одна справа, имеем 5 способов. Столько же — когда одна внутри, а три справа. Наконец, когда две пары внутри, а две справа, имеем $2 \cdot 2 = 4$ способа. Итого

$$14 + 5 + 2 \cdot 2 + 5 + 14 = 42$$

способа. Не правда ли, мы это уже видели?

Упражнение 8. *Рассмотрим произведение* $((((ab)(cd))(ef))(gh))$. *Сотрём все закрывающие скобки, после чего заменим все буквы на закрывающие скобки и последнюю из них сотрём:*

$$((((\,))(\,))(\,))(\,).$$

Как видите, получили правильную расстановку скобок. (На рисунках 15 и 16 показаны и другие примеры.) Докажите, что тем самым мы получаем биекцию между расстановками скобок и способами подсчёта произведений.

$$(ab) \to ()$$

$$((ab)c) \to (()) \qquad (a(bc)) \to ()()$$

$$(((ab)c)d) \to ((())) \qquad ((a(bc))d) \to (()()) \qquad (a((bc)d)) \to ()(()) \qquad (a(b(cd))) \to ()()() \qquad ((ab)(cd)) \to (())()$$

Треугольник Каталана

Треугольник Паскаля (рис. 17) получается, если начать с верхней единицы и затем действовать по правилу «каждое очередное число равно сумме чисел, расположенных над ним справа и слева» (а на краях треугольника — единицы). Он обладает многими интересными свойствами. Но сейчас речь не о нём. Давайте проведём вертикальную линию, левее которой заходить нельзя. И будем выписывать числа так, словно мы составляем треугольник Паскаля (рис. 18). На вертикальной линии — числа Каталана! Не правда ли, неожиданно?

Для дальнейшего нам потребуются два интересных и легко доказываемых свойства треугольника Каталана. Во-первых, сумма чисел, выделенных на рисунке 18 синим цветом, равна числу, обведённому синим кружком:

$$275 + 110 + 35 + 8 + 1 = 429.$$

(Докажите!) Во-вторых, сумма чисел, выделенных зелёным цветом, равна числу, обведённому зелёным кружком:

$$14 + 28 + 48 + 75 = 165.$$

(Обратите внимание: начальное число 5 этой диагонали в сумму не входит!) Доказать это столь же просто, как и предыдущее свойство:

$$14 + 28 + 48 + 75 = 42 + 48 + 75 = 90 + 75 = 165.$$

Хотя эти два свойства треугольника Каталана весьма симпатичны, всё-таки неплохо бы выяснить, почему же на левой вертикали возникают числа Каталана. Другими словами, как связать треугольник Каталана с какой-нибудь из ранее рассмотренных задач, например, с задачей о правильных расстановках скобок?

А вот как. Открывающей скобке сопоставим движение вниз-вправо, а закрывающей — движение вниз-влево. Путь возвращается к исходной вертикали, если количества открывающих и закрывающих скобок уравнялись. Путь пересекает эту вертикаль, как только количество закрывающих скобок превышает количество открывающих. Правильные расстановки скобок взаимно однозначно правильным — то есть возвращающимся к синей вертикали и не пересекающим её — путям. (На рисунках 19, 20 и 21 проиллюстрированы случаи 1, 2 и 3 пар скобок соответственно.)

Итак, любой правильной расстановке скобок соответствует путь в треугольнике Каталана; любое число треугольника Каталана равно количеству путей, которыми можно прийти в соответствующую точку из вершины.

Упражнения

9. *Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла шахматной доски в её правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом на одну клетку вправо или вверх и ни разу не оказавшись выше диагонали a1-h8? (На рисунках 22, 23 и 24 показаны все пути на досках размеров 2×2, 3×3 и 4×4 соответственно.)*

10. *Сколькими способами можно расставить числа от 1 до $2n$ в таблицу из 2 строк и n столбцов таким образом, чтобы в каждой из строк числа слева направо возрастали и каждое число нижней строки было меньше стоящего над ним соответствующего числа верхней строки?*

Указание. Для каждой правильной расстановки n пар скобок создайте таблицу, записав в нижнюю её строку номера открывающих, а в нижнюю — номера закрывающих скобок.

Перестановки Дональда Кнута

Американский математик Д. Кнут (изобретатель «кривой дракона», издательской системы TeX, автор трёхтомного «Искусства програмирования для ЭВМ» и учебника «Конкретная математика», а также многих других книг и статей) заинтересовался, сколькими способами можно так переставить первые n натуральных чисел, чтобы никакие три из чисел полученной последовательности не шли в порядке возрастания.

Например, при $n = 1$ перестановка единственна. При $n = 2$ годятся обе перестановки: и 21, и 12. При $n = 3$ не годится лишь перестановка 123, остальные годятся (рис. 25). При $n = 4$ годятся все перестановки, оставленные невычеркнутыми на рисунке 26. (Проверьте это! Что означают стрелочки, вскоре станет ясно.)

Заметьте: в четырёх столбцах рисунка 26 остались невычеркнутыми соответственно 1, 3, 5 и 5 перестановок. Сумма этих чисел равна $C_5 = 14$, а сами они присутствуют в треугольнике Каталана. Таким образом, возникает гипотеза: для любого натурального n количество правильных по Кнуту перестановок, в которых n расположено на k-м месте, равно числу, расположенному в k-м столбце треугольника Каталана на n-й линии, идущей параллельно синей линии рисунка 18.

Эту гипотезу нетрудно доказать. Начну с простого замечания. Первые $k-1$ чисел любой правильной перестановки образуют убывающую последовательность — иначе вместе с числом n числа a и b, где $a < b$ и a левее, чем b, а b левее, чем n, образовывали бы тройку расположенных в порядке возрастания чисел $a < b < n$.

Пусть непосредственно справа от числа n расположено число c. Можно ли поменять местами числа n и c? Иногда можно, иногда нельзя (посмотрите на стрелочки рисунка 26!). Зависит это от того, останется ли после такой операции слева от n последовательность убывающей. Проще говоря, если слева от n стояло число, которое больше числа c, то менять местами числа n и c можно. В противном случае — нельзя.

В этом самом противном случае заметим, что если справа от c окажется какое-то число $d > c$, то расположенное непосредственно слева от n число вместе с числами c и d образует тройку чисел в порядке возрастания. Значит, числа от $c+1$ до $n-1$ расположены левее числа n. Как вы помните, последовательность чисел, расположенных левее n, является убывающей. Следовательно, она начинается с чисел $n-1$, $n-2$, $\ldots$, $c+1$. Осталось вычеркнуть эти числа вместе с число n — и получим последовательность из первых c ратуральных чисел, в которой c расположено на одну позицию ближе к правому краю, чем раньше роасполагалось число n.

Рассмотрим для примера $n = 9$, $k = 4$. Первые три числа любой такой правильной перестановки образуют убывающую последовательность. Сдвинуть число 9 на пятое место (стоявшее на пятом месте число помещая при этом на четвёртое место) можно в 275 случаях — именно столько существует правильных перестановок на 9 элементах, в которых 9 расположено на 4-м месте. Если же сдвиг невозможен, то справа от 9 должно стоять число большее, чем слева. Разберём всё по порядку. Очевидно, случай $c = 1$ невозможен. Если $c = 2$, то все числа от 3 до 8 должны стоять на первых трёх местах, но им там не хватает места. То же — для $c = 3$, 4 или 5. А вот случай $c = 6$ возможен:

$$87{*}96{*}{*}{*}{*}.$$

Вычёркивая цифры 7, 8 и 9, получаем последовательность вида $*6****$, а таких (правильных по Д. Кнуту) последовательностей всего 42 штуки. Далее, при $c = 7$ имеем

$$8{*}{*}97{*}{*}{*}{*}.$$

Вычёркивая цифры 8 и 9, получаем $**7****$; таковых 90 штук. Наконец, при $c = 8$ надо вычеркнуть только цифру 9, а правильных по Д. Кнуту последовательностей вида $***8****$ существует 165 штук. Итого: $275 + (42 + 90 + 165) = 297 + 275 = 572$.

Деревья с n листьями

На рисунках 15 и 16 кроме произведений и расстановок скобок изображены деревья. А на рисунке 27 разбиению выпуклого 9-угольника сопоставлено корневое плоское дерево*) с 9 листьями.

Английский математик Артур Кэли заметил, что C_n есть количество плоских корневых деревьев с n листьями†), степень‡) любой вершины которого равна 1 или 3. (На рисунках 28, 29 и 30 изображены все интересующие нас деревья с 3, 4 и 5 листьями соответственно.)

Польский математик Ян Лукасевич предложил несложный способ нахождения расстановки скобок, соответствующего дереву. Он пометил все листья, кроме последнего, закрывающими скобками, а вершины степени 3 — открывающими (рис. 31). А затем вообразил, что гусеница оползает вокруг всего дерева вдоль пунктирной линии, собирая все скобки (однажды взятую скобку гусеница второй раз не берёт!). Нетрудно доказать, что гусеница получит правильную расстановку скобок, соответствующую способу вычисления произведения. Например, на рисунке 31 она получит расстановку $((()))()()()$, соответствующую произведению $(((ab)c)(d(e(fg))))$.

Деревья с n вершинами

В 1964 году было обнаружено, что количество корневых плоских деревьев с n вершинами равно C_n. У таких деревьев $n-1$ рёбер; степени вершин могут быть любыми. Красивую простую конструкцию придумал Фрэнк Бернхарт (рис. 32): корень дерева — это центр круга, системе непересекающихся хорд соответствует (изображённое синим цветом) дерево, количество рёбер которого равно количеству этих хорд.

Есть — придуманное тем же Бернхартом — и биекция между корневыми плоскими деревьями с n листьями, степени вершин которых могут равняться только 1 или 3, и корневыми плоскими деревьями с n вершинами. Это взаимно однозначное соответствие для $n = 2$, 3 и 4 показано на рисунках 33, 34 и 35 соответственно. Идея в том, что все горизонтальные рёбра (синие линии) стягиваем в точки.

Упражнения

11. *Докажите, что гусеница, обползающая любое из вновь нарисованных деревьев, даст ту же самую правильную расстановку скобок, что и на исходном дереве, если изменит свой алгоритм следующим образом: начнёт не с корня, а с нижней вершины; каждый раз, когда поползёт вверх, напишем открывающую скобку, а на спуске по ребру вниз — закрывающую.*

---

*)Дерево — это связный граф без циклов. Слово «плоское» означает, что граф нарисован на плоскости без пересечений. «Корневое» — что одна из вершин, из которой выходит только одно ребро, выделена — названа корнем дерева. На рисунке 27 корневая вершина отмечена звёздочкой.

†)Лист — это отличная от корня вершина дерева, из которой выходит только одно ребро; на рисунке 27 листы помечены буквами.

‡)Степень (или валентность) вершины графа — это количество сходящихся в ней рёбер.

12. *На рисунках 36, 37 и 38 изображены деревья, степени вершин которых не превосходят числа 3, а количества вершин равны, соответственно, 2, 3 и 4. Докажите, что количество таких деревьев с $n-1$ вершинами равно C_n.*

Указание. Вообразите, что у корневого плоского дерева с n листьями, степени вершин которых могут равняться только 1 или 3, одновременно отсохли все листья.

Числа Белла и плоские рифмовки

Числа Белла пересчитывают разбиения n-элементного множества на классы. Другими словами, количество различных рифмовок для строфы из n строк есть n-е число Белла (рисунки 39, 40 и 41 соответствуют значениям $n = 2$, 3 и 4). Например, четверостишие имеет 15 возможных рифмовок (одна из которых — отсутствие какой бы то ни было рифмы). А для 14-строчного стихотворения способов 190 899 322 (именно таково 14-е число Белла).

Джоанна Гроуми, исследовавшая рифмовки в 1970 году, назвала те из них, которые не нуждаются в пересечении дуг, плоскими. Как нетрудно убедиться, количество плоских рифмовок с данным числом строк — число Каталана!

Ещё несколько конструкций

Есть несколько десятков конструкций, приводящих к числам Каталана. Заинтересованный и искушёный в математике читатель может познакомиться со всеми ними по книге Н. Дж. А. Слоуна «Справочник числовых последовательностей» и по многочисленным журнальным статьям. Я ограничусь лишь несколькими наиболее понравившимися мне конструкциями. Краткости ради их описания будут не вполне точными. Надеюсь, рисунки — а все рисунки выполнены для ситуаций, когда объектов 5 штук — помогут восстановить пропущенные детали.

Итак, n-е число Каталана равно количеству

- способов расположить на плоскости стопку из нескольких одинаковых монет, где в нижнем ряду — $n-1$ монета (рис. 43);
- разбиений изображённой на рисунке 44 фигуры на $n-1$ прямоугольников, каждый из которых содержит по одной клетке правой границы фигуры;
- путей Дика (то есть путей, начинающихся в начале координат, не спускающихся ниже оси абсцисс, где каждый шаг — перемещение на единицу вправо и на единицу вверх или вниз), оканчивающихся на оси абсцисс, обладающих $n-1$ точками локального минимума (другими словами, $n-2$ пиками) и не имеющими трёх подряд идущих шагов в одном и том же направлении (рис. 45);
- путей Дика, оканчивающихся в точке $(2n;0)$, ни один из пиков (то есть локальных максимумов) котороых не расположен на высоте 2 (рис. 46);
- путей Дика, оканчивающихся в точке $(2n;0)$ и обладающих тем свойством, что длина любой максимальной последовательность подряд идущих шагов «направо-вниз» нечётна (рис. 47);

- горизонтальных полимино ширины n (рис. 48);

- симметричных полимино периметра $4(2n-1)$ (рис. 49);

- полимино периметра $2n$ (рис. 50);

- последовательностей $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1}$ натуральных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_k \leqslant k$, где $1 \leqslant k < n$, а именно, при $n = 4$ это последовательности $1 \leqslant 1 \leqslant 1$, $1 \leqslant 1 \leqslant 2$, $1 \leqslant 1 \leqslant 3$, $1 \leqslant 2 \leqslant 2$, $1 \leqslant 2 \leqslant 3$;

- последовательностей $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2}$ натуральных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_k \leqslant 2k$, где $1 \leqslant k < n-1$ (при $n = 4$ это последовательности $1 < 2$, $1 < 3$, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$);

- перестановок σ множества первых $n-1$ натуральных чисел, для которых нет таких чисел $i < j < k$, что $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ (для $n = 4$ это перестановки 123, 132, 213, 231 и 321);

- перестановок множества первых $n-1$ натуральных чисел, которые могут быть превращены в тождественную при помощи стека (рис. 51); точнее говоря, рассмотрим операцию S, определённую на множестве всех перестановок при помощи формул $S(\varnothing) = \varnothing$ и $S(ukv) = S(u)S(v)k$, где u и v — перестановки, все элементы которых меньше k (при $n = 4$ это перестановки 123, 132, 213, 312 и 321);

- перестановок множества первых $n-1$, которые можно преобразовать в тождественную при помощи минимальной маневровой горки (другими словами, при помощи двух очередей, рис. 52, при $n = 4$ это перестановки 123, 132, 213, 231 и 312);

Сейчас речь пойдёт о вероятностях, поэтому напоминаю, что я говорю не вполне точно (заинтересованному читателю советую обратиться к соответствующим учебникам). Если для набора равномерно распределённых на одном и том же отрезке независимых случайных величин x_1, x_2, $\ldots$, x_n рассмотреть точки $A_1(1; x_1)$, $A_2(2; x_2)$, $\ldots$, $A_n(n; x_n)$, то вероятность того, что ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ выпукла вверх, равна $C_n/(n!)^2$.

Не менее интересно и следующее. Рассмотрим внутри данного квадрата n точек, выбранных случайно и независимо. Пусть для любой из этих точек и для любой области квадрата вероятность того, что точка попадает в эту область, равна отношению площади области к площади квадрата. Оказывается, вероятность того, что все n точек являются вершинами своей выпуклой оболочки, равна $\big(C_n/(n-1)!\big)^2$.

Явные формулы

Рекуррентная формула $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ требует для вычисления n-го числа Каталана C_n знать все предыдущие значения C_1, C_2, $\ldots$, C_{n-1}. Хотелось бы найти явную формулу, выражающую C_n непосредственно через n. Я изложу три способа: при помощи 1) польской записи; 2) леммы об отражении; 3) производящих функций.

Польская запись

Что такое польская запись, очень хорошо знают программисты, которым приходится учить машину вычислять значения арифметических выражений или её производить какие-то другие операции. Рассмотрим, например, арифметическое выражение

$$((1 - 2) + (3 + 4)) : ((5 - 6) \cdot 7 - 8 \cdot 9).$$

Убрать скобки, очевидно, нельзя: прорядок действий пострадает. Но давайте вместо $1 - 2$ писать $12-$. И вообще, для любой бинарной операции $*$ вместо $a * b$ будем писать $ab*$. Тогда вместо $(1 - 2) + (3 + 4)$ получим $12 - 34 + +$, а вместо всего выражения получим

$$12 - 34 + +56 - 7 \cdot 89 \cdot - : .$$

Заметьте: символ выполняемой в последнюю очередь операции деления оказался на последнем месте. Что, согласитесь, логично! Немного полумав, вы поймёте, как при помощи стека компьютер может вычислять (бесскобочное!) польское выражение.

Перейдём к числам Каталана. Каждому произведению с правильно расставленными скобками сопоставим слово из букв a и p по следующему правилу: если выражение состоит лишь из одной буквы, пишем a; если выражениям U и V уже сопоставлены слова u и v, то произведению $U \cdot V$ сопоставляем uvp. Например,

$$\begin{array}{ccccccc} & & ab & \longmapsto & aap, & & \\ & & (ab)c & \longmapsto & aaapp, & & \\ & & a(bc) & \longmapsto & aaapp, & & \\ ((ab)c)d & \longmapsto & ((aap)c)d & \longmapsto & (aapap)d & \longmapsto & aapapap, \\ & & a(b(cd)) & \longmapsto & aaaappp, & & \\ & & (a(bc))(de) & \longmapsto & aaappaapp. & & \end{array}$$

Как видите, каждому способу вычисления произведения соответствует слово из n букв a и $n - 1$ букв p. Обратное неверно: например, слова *ppaaa* или *apaap* не могут быть получены с помощью описанной процедуры.

Ситуацию проясняет понятие циклической перестановки. Начнём с примера. Записав буквы *С Л О В А* по кругу, по часовой стрелке сможем прочитать одно из следующих слов:

$$\begin{array}{ccccc} С & Л & О & В & А \\ Л & О & В & А & С \\ О & В & А & С & Л \\ В & А & С & Л & О \\ А & С & Л & О & В \end{array}$$

Вообще, слово $a_{k+1} \ldots a_n a_1 \ldots a_k$ будем называть циклической перестановкой слова
$a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_n$. Оказывается, если A — слово из n букв a и $n - 1$ буквы p, то одно и только одно из циклически сравнимых с A слов получается из некоторой расстановки скобок вышеописанной конструкцией.

Доказать это нетрудно индукцией по n. Среди циклически сравнимых с A слов имеет смысл рассматривать лишь те, которые не начинаются с буквы p, но кончаются ею. Такие, конечно, существуют. В таком слове A — это тоже легко понять — найдётся подслово вида aap. Заменим его буквой a. Мы получили слово, в котором $n-1$ буква a и $n-2$ буквы p, а для него применяем индукционное предположение. (На рисунке 53 это показано для $n=9$.)

Теперь выведем формулу для C_n. Среди $2n-1$ мест мы можем в точности C_{2n-1}^{n-1} способами выбрать $n-1$ место для букв p. Разделив C_{2n-1}^{n-1} на $2n-1$, получаем ответ:

$$C_n = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.$$

Упражнение 13. *Докажите равенство* $C_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} C_n$.

Лемма об отражении

Как помните, C_n равно количеству способов так расположить $n-1$ открывающих и $n-1$ закрывающих скобок в ряд, чтобы при чтении слева направо ни в какой момент число закрывшихся скобок не превосходило числа открывшихся. Заменив «(» на «$+1$», а «)» на «-1», получим, что C_n есть количество последовательностей из $n-1$ единицы и $n-1$ минус единицы, суммы всех начальных отрезков которых неотрицательны.

При этом каждой последовательности $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, сопоставляем путь, выходящий из начала координат, i-й отрезок которого $(i = 1, \ldots, n)$ является отрезком прямой с угловым коэффициентом ε_i, соединяющим точку $(i-1,\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1})$ с точкой $(i,\ \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i)$.

Через $N_{n,s}$ обозначим количество путей, начинающихся в начале координат и оканчивающихся в точке (n, s). Очевидно, если среди $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ имеется p единиц и q минус единиц, то $s = p - q$. Поскольку p мест для положительных ε_i выбираются из $n = p + q$ имеющихся мест, $N_{p+q,p-q} = C_{p+q}^{p}$.

Пусть A и B — точки с целыми координатами, причём B лежит выше оси абсцисс и правее оси ординат, B' — точка, симметричная B относительно оси абсцисс (рис. ??).

Принцип отражения. Количество начинающихся в точке A и оканчивающихся в точке B путей, которые касаются оси абсцисс или пересекают её, равно числу путей, оканчивающихся в точке B'.

Доказательство очень простое: если T — самая левая точка пути, попавшая на ось абсцисс, отразим участок AT относительно оси.

Следующая теорема о баллотировке доказана в 1878 году У. Уитвортом и в 1887 году Ж. Бертраном: если на выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, то вероятность того, что при последовательном подсчёте голосов P все время опережал Q, равна $\frac{p-q}{p+q}$.

Иными словами, если n и s — натуральные числа, то существует ровно $\frac{s}{n} N_{n,s}$ путей из начала координат в точку (n, s), все точки которых, кроме начала координат, расположены выше оси абсцисс.

Доказать это нетрудно. По принципу отражения, путей из $(1,1)$ в (n,s), не задевающих ось абсцисс, имеется ровно

$$N_{n-1,s-1} - N_{n-1,s+1} = C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p}.$$

Простая выкладка показывает, что правая часть равна $N_{n,s}\frac{p-q}{p+q}$.

Очевидно, число Каталана C_n получается, если в теореме о баллотировке положить $p=n$, $q=n-1$.

Производящая функция

Производящие функции — одно из мощных орудий комбинаторики. Идея состоит в том, чтобы «запаковать» всю бесконечную последовательность в одно выражение. Производящая функция для последовательности Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... — это функция

$$f(x)=1=x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+132x^6+429x^7+1430x^8+\ldots$$

При этом пока даже нас не интересует, для каких x этот степенной ряд сходится: математики говорят в таких случаях, что мы рассматриваем формальный степенной ряд. Поскольку

$$f(x)\cdot f(x)=C_1^2x^2+(C_1C_2+C_2C_1)x^3+(C_1C_3+C_2C_2+C_3C_1)x^4+\ldots+$$
$$+(C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_1)x^n+\ldots,$$

то

$$f^2(x)=-x+f(x).$$

(Проверьте!) Решая квадратное уравнение относительно $f(x)$, получаем

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

(Теперь ясно, что ряд для $f(x)$ сходится при $|x|<\frac{1}{4}$. Впрочем, нам это не важно.) Здесь взят знак минус, так как ряд $f(x)$ не имеет свободного члена. Разложив правую часть в ряд по степеням x по биному Ньютона, получаем

$$C_n=-\frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\cdots(\frac{3-2n}{2})}{n!}(-4)^n.$$

Упростив это выражение, окончательно получаем $C_n=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$.

Упражнение 14. *Рассматривая производящую функцию*

$$F(x)=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+13x^6+21x^7+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n x^{n-1},$$

выведите явную формулу n-го члена последовательности Фибоначчи, заданной начальными членами $\varphi_1=\varphi_2=1$ и рекуррентным соотношением $\varphi_{n+2}=\varphi_{n+1}+\varphi_n$.

Как нетрудно проверить, $F(x)\cdot(1-x-x^2)=1$. Осталось разложить дробь $\frac{1}{1-x-x^2}$ на простейшие:

$$F(x)=\frac{-1}{x^2+x-1}=\frac{-1}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1+x\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1-x\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right).$$

Воспользовавшись формулой $\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+t^4+\ldots$, получаем:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(x\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(x\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^k\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{\infty}x^k\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right).$$

Мы доказали формулу Бине:

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$