Группа "Ураган".
Счетное конструирование.

Задачи.

Порция 1.

1.1 Докажите, что можно осветить плоскость бесконечным набором прожекторов, освещающих углы в 1°, $\frac{1}{2}^\circ$, $\frac{1}{4}^\circ$, $\dots \frac{1}{2^n}^\circ$, $\dots$.

1.2 Докажите, что можно натуральные расставить в клетки бесконечной клетчатой плоскости числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз, и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми.

Порция 2.

2.1. Докажите, что множество натуральных чисел можно разбить на такие бесконечные арифметические прогрессии с разностями $d_1, d_2, \dots$, что $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots < 0,1$.

2.2. Докажите, что существует такое подмножество M натуральных чисел, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M.

2.3*. Докажите, что можно окрасить целочисленные точки плоскости в 2006 цветов так, чтобы на каждой прямой (на которой не менее двух целых точек) раскраска была периодической, а раскраска плоскости не была периодической.

Комментарии, указания и решения.

Эту тему можно коротко охарактеризовать как "конструировние без явного предъявление конструкции". Конструкция строится в счетное число шагов. Решения задач очень короткие, однако придумать их непросто. Требуется определенный навык, ощущение принципиальной разницы между в свойствах конечных и счетных множеств.

1.1. *Решение.* Покроем углом с номером k круг радиуса k с центром в начале координат.

1.2. *Решение.* Перенумеруем клетки. Расставляем числа $1, 2, 3, \ldots$ по порядку по следующему правилу. На первом шаге поставим число 1 в клетку с номером n. Пусть после n шагов уже расставлены числа $1, 2, \ldots, n$, и клетка k — незанятая клетка с минимальным номером. Поставим $n+1$ в клетку с номером k, если $n+1$ просто. Иначе поставим $n+1$ в любую клетку такую, что в ее строке и столбце еще не расставлено чисел. Через несколько шагов клетка с номером k будет занята, так как простых чисел бесконечно много.

2.1. *Решение.* Подберем прогрессии с разностями $d_i = 2^{i+k}$ для подходящего k.

Опишем выбор первых членов a_i. Пусть $a_1 = 1$. Если $a_1, \ldots, a_n$ уже выбраны, то пусть a_{n+1} — наименьшее натуральное, не входящее ни в одну из прогрессий (Почему такое число найдется? И даже среди первых d_n чисел?). Так как d_{n+1} делится на $d_1, d_2, \ldots, d_n$, то прогрессия с номером $n+1$ не пересекается с уже определенными (Почему?).

2.2. *Набросок решения.* Положим $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2k} \in M$ уже определены и таковы, что в все разности вида $r_{ij} = a_j - a_i$ для $1 \leq i < j \leq 2k$ различны, и среди них есть числа $1, 2, \ldots k$.

Пусть R_k — множество разностей r_{ij}, и m_k — максимальное из $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$.

Если $R_k \not\ni k+1$, то положим $a_{2k+1} = 2m_k$, $a_{2k+2} = 2m_k + k + 1$.

Если $R_k \not\ni k+1$, то положим $a_{2k+1} = 2m_k$, $a_{2k+2} = 4m_k$.

Тогда $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2k} < a_{2k+1} < a_{2k+2}$ и таковы, что в все разности вида $r_{ij} = a_j - a_i$ для $1 \leq i < j \leq 2k+2$ различны, и среди них есть числа $1, 2, \ldots k+1$.

2.3. *Решение.* Перенумеруем прямые, содержащие бесконечное множество целочисленных точек. Перенумеруем целочисленные векторы. На первом шаге покрасим первую прямую периодично, используя 2006 цветов. На i-м ($i \geq 2$) шаге покрасим периодично i-ю прямую (это возможно, так как до i-го шага на ней покрашено конечное число точек), а затем найдем две еще не покрашенные точки, отстоящие на вектор с номером $i-1$, и окрасим их в разные цвета.

Из определения процедуры вытекает, что окраска каждой прямой периодична, но окраска плоскости непериодична, так как не совмещается сдвигом ни на какой целочисленный вектор.