Группа "Ураган".
Идея цикличности (в разных проявлениях).

Задачи.

Порция 1.

1.1. Решите систему уравнений $x_1 + \sqrt{x_2} = x_2 + \sqrt{x_3} = \ldots = x_n + \sqrt{x_1} = 2$

а) для $n = 9$; а) для $n = 10$.

1.2. В выпуклом многоугольнике все углы равны. Известно, что внутри него есть точка, из которой все стороны видны под равными углами. Докажите, что этот многоугольник правильный.

1.3. В футбольном первенстве участвуют 20 команд. Докажите, что после двух туров можно выбрать 10 команд, среди которых нет двух уже сыгравших.

1.4. Имеются красные и синие бусинки. Составляется ожерелье из 20 бусинок. Оно называется *хорошим*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k-1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в хорошем ожерелье, если а) $k = 2$; б) $k = 3$; в) $k = 4$; г) $k = 5$.

1.5. Пусть m — натуральное число, f_n — последовательность Фибоначчи:
$f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

а) Докажите, что последовательность остатков f_n при делении на m периодична.

б) Докажите, что найдется такой номер n, что f_n делится на m.

Порция 2.

2.1. В пересечении пяти отрезков получена пятиконечная звезда. Ее внешний контур состоит из 10 отрезков. Раскрасим эти 10 отрезков поочередно в красный и синий цвета. Может ли оказаться, что любой красный отрезок длиннее любого синего?

2.2. Бесконечная последовательность цифр $9, 6, 2, 4, \ldots$ строится по правилу: каждая следующая цифра равна последней цифре суммы предыдущих четырех. Встретится ли в этой последовательности четверка идущих подряд цифр $2, 0, 0, 7$?

2.3.* В графе каждая вершина имеет степень не меньше $k \geq 2$. Докажите, что в графе имеется цикл длины не меньше $k+1$.

2.4. Решите задачу 1.4 для произвольного числа n бусинок в ожерелье и любого $k \leq [n/2]$.

Комментарии, указания и решения.

Идея зацикливания, цикличности так или иначе присутствует во многих олимпиадных задачах. В данной серии представлены задачи разнообразной тематики (алгебра, геометрия, делимость, комбинаторика), объединенные этой общей идеей.

1.1. а) *Решение.* Заметим, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ — решение. Пусть $x_1 > 1$. Из равенств последовательно получаем, что $x_2 < 1$, $x_3 > 1$, …, $x_9 > 1$, $x_1 < 1$ — противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если $x_1 < 1$.

б) *Набросок решения.* Из условия вытекает, что $x_i \in [0; 2]$. Нетрудно доказать, что если $x_1 \neq 1$, то расстояние от x_k до 1 увеличивается с ростом k.

1.2. *Решение.* Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — многоугольник, и O — точка внутри него. Из равенств $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \ldots = \angle A_nA_1A_2 = \frac{\pi(n-2)}{n}$, $\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_nOA_1 = \frac{2\pi}{n}$ следует, что $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3 = \ldots = \angle OA_nA_1$. Треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, …, OA_nA_1 подобны, поэтому $OA_1/OA_2 = k$, $OA_2/OA_3 = k$, …, $OA_n/OA_1 = k$. Перемножив равенства, получим $k = 1$, откуда $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$.

1.3. *Набросок решения.* Составим граф сыгранных игр. Из каждой вершины выходит два ребра, поэтому граф представляет собой объединение непересекающихся циклов. Эти циклы четной длины (цикл нечетной длины не может быть сыгран в два тура). Из каждого цикла достаточно выбрать половину команд, не игравших друг с другом.

1.4. См. общий случай в задаче 2.4.

1.5. *Решение.* Выпишем последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на m: $r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots$. Упорядоченных пар остатков конечное число, поэтому найдутся номера $i \neq j$ такие, что $r_i = r_j$ и $r_{i+1} = r_{j+1}$. Остатки r_i и r_{i+1} однозначно определяют последующий и предыдущий остатки, поэтому последовательность остатков периодична с периодом $l = j - i$.

Из периодичности вытекает, что $r_{l+1} = r_{l+2} = 1$, откуда $r_l = 0$.

2.1. *Указание:* Для пяти треугольников, содержащих красную и синюю стороны, применим утверждение о том, что против большей стороны лежит больший угол.

2.2. *Ответ:* встретится.

Набросок решения: Аналогично задаче 1.5 докажем, что последовательность периодична. Легко видеть, что появлению четверки $9, 6, 2, 4$ предшествует четверка $2, 0, 0, 7$.

2.3. *Решение:* Пойдем по ребрам графа, начиная с некоторой вершины A_0. Каждый раз будем переходить в вершину, в которой мы еще не побывали, если это возможно. Рассмотрим момент, когда мы прошли пусть $A_0A_1 \ldots A_n$ и уже невозможно пройти в новую вершину это уже невозможно. Это означает, что k ребер ведут из вершины A_n в вершины из множества $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Возьмем A_i, соединенную с A_n, для которой номер i наименьший. Тогда $i \leq n-k$, и $A_{n-k}A_{n-k+1} \ldots A_n$ — искомый цикл.

2.4. *Набросок решения:* Соединим пары вершин, между которыми $k-1$ бусин. Это "граф запретов": две красные вершины не могут быть соединены ребром. Пусть $d =$НОД(n,k). Тогда граф распадается на d циклов длины n/d. В каждом цикле может быть не более половины красных вершин, и $[n/2d]$ красных вершин покрасить можно.

Ответ: $d[n/2d]$.