Ориентированные графы

Задачи

1. Есть ориентированный граф на 200 вершинах, причем из каждой вершины выходит как минимум одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно нарисовать еще 100 ребер так, чтобы граф стал сильно связным (ребра в графе могут быть кратными).

2. Докажите, что в сильно связном графе на n вершинах можно стереть все ребра кроме $2n-2$ так, чтобы оставшийся граф был сильно связным.

3. n команд сыграли однокруговой турнир по волейболу. Известно что для любой команды A и любой другой команды B найдется такая команда C такая, что A выиграла у C, а C у B. Какое минимальное количество команда могло участвовать в турнире?

4. Докажите, что при $n \geq 4$ из сильно связного полного ориентированного графа на n вершинах можно удалить одну вершину так, чтобы он остался сильно связным.

5. При каких $n \leq 6$ в любом полном ориентированном графе на n вершинах найдется такая вершина, что если поменять направление всех ребер с концами в этой вершине, то получиться сильно связный граф?

6. Докажите, что при $n \geq 7$ в любом полном ориентированном графе найдется вершина из предыдущей задачи.

7. Какое минимальное количество несамопересекающихся циклов длины 99 может быть в сильно связном ориентированном графе на 100 вершинах?

8. Каких полных ориентированных графов на 2006 вершинах больше, сильно связных или не сильно связных?