Числа Рамсея

Задачи

1. Докажите, что $R(m, n; 2) \leq C_{m+n-2}^{n-1}$.
2. Докажите, что $R(3, 4; 2) = 9$ (а не 10, как получается по формуле из задачи 1).
3. Докажите, что $R(n, 3; 2) \leq \frac{n^2+3}{2}$.
4. Найдите $R(3, 3, 3; 2)$.
5. На плоскости даны 6 точек общего положения. Рассматриваются все треугольники с вершинами в этих точках. Докажите, что найдется треугольник, который в одном из этих треугольников является наибольшей стороной, а в другом наименьшей.
6. Докажите, что для любого натурального n существует такое число N, что при любой раскраске числе от 1 до N в n цветов найдутся натуральные x и y (не обязательно разные) такие, что числа x, y и $x + y$ раскрашены в один цвет.
7. a) Докажите, что среди 5 точек общего положения можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого 4-хугольника.

   b) (Теорема Эрдеша-Секереша.) Докажите, что из любого достаточно большого количества точек общего положения можно выбрать n, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника.
8. Докажите, что при любом фиксированном n существует достаточно большое простое число p, по модулю которого неверна теорема Ферма, то есть существуют такие ненулевые остатки x, y и z, что $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$.