

Группа шёлка

Многочлены

21.08.08 Ночь, Андрей Трепалин

1. Решите уравнение

$$(x+1)^{63} + (x+1)^{62}(x-1) + \dots + (x-1)^{63} = 0$$

2. Многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b — целые, имеет три целых корня. Докажите, что они различны.
3. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
4. Существует ли многочлен P с целыми коэффициентами и натуральное число $k > 1$ такие, что все числа $P(k^n)$ попарно взаимно просты?
5. Для какого наибольшего числа n найдётся такой многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, что уравнение $P(x) \cdot (P(x) + 100) = 0$ имеет более n различных целых решений.
6. Докажите, что не существует многочлена степени не ниже 2 с целыми неотрицательными коэффициентами, значение которого при любом простом p является простым числом.
7. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с натуральными коэффициентами найдётся такое целое k , что числа $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2008)$ будут составными.
8. a, b и c — целые числа, такие что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет натуральный корень. Докажите, что число $|a|$ — составное.