О невыпуклых ежах, заполняющих всю плоскость

(Исследовательская задача для школьников, предложенная В. А. Александровым)

10 сентября 2010 г.

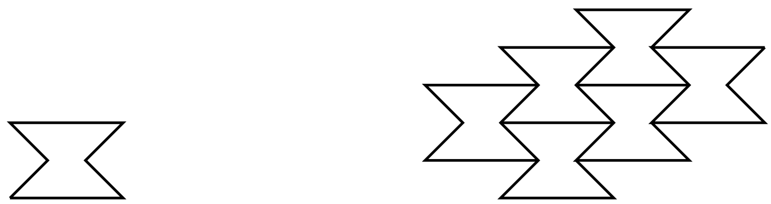
Параллелогоном называют выпуклый многоугольник, параллельными копиями которого можно заполнить плоскость, прикладывая их друг к другу по целым сторонам, так чтобы не возникало пустот и наложений. Известная теорема утверждает, что *параллелогонами являются всякий параллелограмм и всякий шестиугольник с центром симметрии; других параллелогонов нет.* Несложное доказательство этой теоремы, не требующее знаний, выходящих за рамки школьной программы, можно найти, например, в книге [1] (теорема 3 из § 1 главы VIII). Эта теорема (и её пространственный аналог) лежат в основе математической теории кристаллов.

В обсуждаемой теореме не представляется возможным полностью отказаться от требования выпуклости многоугольника, т. к. невыпуклых многоугольников, которыми можно заполнить плоскость, настолько много, что ни о какой классификации не может быть и речи. (Убедитесь в этом!) Остаётся надежда, что существует класс многоугольников, содержащий все выпуклые, но не совпадающий с классом всех многоугольников, для которого классификация всё-таки возможна. Одним из претендентов является класс многоугольников (и их пространственных аналогов), называемых *ежами* (впрочем, иногда и в русском и в английском языках для них используют исходный французский термин — *herissons*). См., например, статьи [2, 3].

Приступая к определению ежа допустим, что на плоскости задан (не обязательно выпуклый) многоугольник P. Более того, допустим, что каждому его ребру a сопоставлен единичный вектор $\vec{n}_a$, перпендикулярный ребру a. (Подчеркнём, что не исключается ситуация, когда для некоторых рёбер вектор $\vec{n}_a$ направлен наружу многоугольника, а для других — внутрь.) Если в вершине A многоугольника P сходятся рёбра a и b, то сопоставим ей кратчайшую дугу S_A единичной окружности с центром в начале координат, соединяющую концы векторов $\vec{n}_a$ и $\vec{n}_b$, отложенных из начала координат.

Ежом называется (не обязательно выпуклый) многоугольник на плоскости, каждому ребру a которого можно сопоставить перпендикулярный вектор $\vec{n}_a$ единичной длины так, что совокупность дуг S_A, соответствующая, в соответствии с данным выше описанием, всем его вершинам A, заполняет (без пустот и наложений) всю единичную окружность.

Суть этого определения в том, что «иголки» (т. е. векторы $\vec{n}_a$ и лежащие «между ними» векторы с концами в точках дуг S_A) торчат во всех направлениях, причём каждому направлению соответствует всего одна иголка. Проверьте, что всякий выпуклый многоугольник с необходимостью является ежом. В левой части рисунка изображён невыпуклый ёж. Убедитесь в этом, должным образом выбрав для каждого ребра a вектор $\vec{n}_a$ и нарисовав дуги S_A для всех вершин A. На том же рисунке справа показано как параллельные копии этого ежа заполняют всю плоскость.



Теперь всё готово для формулировки задачи.

Задача. *Найдите все невыпуклые ежи, параллельными копиями которых можно заполнить всю плоскость, прикладывая их друг к другу по целым сторонам, так чтобы не возникало пустот и наложений.*

Список литературы

[1] *А. Д. Александров.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. [Книга имеется в свободном доступе на сайте `http://www.techlibrary.ru`. Недавно вышло второе издание — *А. Д. Александров.* Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007. (Избранные труды; Т. 2)]

[2] *V. Alexandrov.* Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons. Geom. Dedicata **107**, 169–186 (2004). [В свободном доступе эта статья имеется в архиве препринтов по адресу `http://xxx.lanl.gov/abs/math.MG/0211286`]

[3] *G. Panina.* A. D. Alexandrov's uniqueness theorem for convex polytopes and its refinements. Beitr. Algebra Geom. **49**, No. 1, 59–70 (2008). [В соответствии с правилами данного журнала, через два года после публикации полный текст статьи появится в свободном доступе на сайте `http://www.emis.de/journals/BAG/vol.49/no.1/3.html`]